





# **LINEAR PROGRAMMING**

## **METHODS AND APPLICATIONS**

**SAUL I. GASS**

APPLIED SCIENCE DEPARTMENT  
INTERNATIONAL BUSINESS MACHINES, INC.  
GRADUATE SCHOOL  
U. S. DEPARTMENT OF AGRICULTURE

McGraw-Hill Book Company, Inc.  
New York Toronto London

1958

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

---

С. Г А С С

# ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ)

Перевод с английского  
ГОЛЬШТЕЙНА Е. Г. и СУШКЕВИЧА М. И.

Под редакцией  
ЮДИНА Д. Б.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1961

*Саул И. Гасс*

Линейное программирование (методы и приложения).

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакие.*

Корректор *С. Н. Емельянова.*

---

Сдано в набор 6/III 1961 г. Подписано к печати 20/VI 1961 г. Бумага  $84 \times 108^{1/32}$ .  
Физ. печ. л. 9,5. Условн. печ. л. 15,58. Уч.-изд. л. 14,40. Тираж 25 150 экз.  
Цена книги 87 коп. Заказ № 1927.

---

Государственное издательство физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	7
Предисловие автора к американскому изданию . . . . .	11

### ЧАСТЬ I

#### ВВЕДЕНИЕ

Глава 1. Введение . . . . .	17
§ 1. Задачи линейного программирования . . . . .	17
§ 2. Примеры задач линейного программирования . . . . .	21
Глава 2. Математические основы . . . . .	28
§ 1. Матрицы и определители . . . . .	28
§ 2. Векторы и векторные пространства . . . . .	33
§ 3. Выпуклые множества . . . . .	37
§ 4. Линейные неравенства . . . . .	41
§ 5. Решение систем линейных уравнений . . . . .	47

### ЧАСТЬ II

#### МЕТОДЫ (ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АСПЕКТЫ)

Глава 3. Общая задача линейного программирования . .	55
§ 1. Задачи линейного программирования . . . . .	55
§ 2. Свойства решений задачи линейного программирования . . . . .	56
§ 3. Построение опорных планов . . . . .	65
Глава 4. Симплексный метод . . . . .	73
§ 1. Отыскание оптимального плана . . . . .	73
§ 2. Алгоритм симплексного метода . . . . .	78
§ 3. Метод искусственного базиса . . . . .	89
§ 4. Геометрическая интерпретация симплексного метода . . . . .	96
Глава 5. Проблема двойственности в линейном программировании . . . . .	103
§ 1. Несимметричные двойственные задачи . . . . .	103
§ 2. Симметричные двойственные задачи . . . . .	111

<b>Глава 6. Модифицированный симплексный метод . . . . .</b>	<b>119</b>
§ 1. Использование обычной формы обратной матрицы . .	119
§ 2. Использование мультипликативного представления об- ратной матрицы . . . . .	136
<b>Глава 7. Вырожденные задачи . . . . .</b>	<b>141</b>
§ 1. Способы устранения заикливания . . . . .	142
§ 2. Примеры заикливания . . . . .	146
<b>Глава 8. Параметрическое линейное программирование</b>	<b>152</b>
§ 1. Линейная форма с коэффициентами, зависящими от параметра . . . . .	152
§ 2. Параметрическая двойственная задача . . . . .	160
<b>Глава 9. Дополнительные вычислительные приемы . . . .</b>	<b>165</b>
§ 1. Определение исходного плана . . . . .	167
§ 2. Двойственный симплексный метод . . . . .	173
§ 3. Применение вычислительных машин для решения за- дач линейного программирования . . . . .	179

## часть III

## ПРИЛОЖЕНИЯ

<b>Глава 10. Транспортная задача . . . . .</b>	<b>184</b>
§ 1. Общая транспортная задача . . . . .	184
§ 2. Метод решения транспортной задачи . . . . .	196
§ 3. Видоизменения транспортной задачи . . . . .	207
<b>Глава 11. Общие приложения линейного программиро-         вания . . . . .</b>	<b>214</b>
§ 1. Задачи планирования производства и хранения . . . . .	216
§ 2. Межотраслевые задачи . . . . .	223
§ 3. Задачи диеты . . . . .	231
§ 4. Специальные задачи линейного программирования . . .	242
§ 5. Обзор областей применения линейного программиро- вания . . . . .	246
<b>Глава 12. Линейное программирование и теория игр . .</b>	<b>258</b>
§ 1. Введение в теорию игр . . . . .	258
§ 2. Эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования . . . . .	270
<b>Библиографический указатель по приложениям линейного про-         граммирования . . . . .</b>	<b>281</b>
<b>Список цитированной литературы . . . . .</b>	<b>292</b>
<b>Именной указатель . . . . .</b>	<b>299</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>301</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В последнее десятилетие весьма широкий размах приобрело применение количественных методов в оперативной деятельности, в планировании хозяйства, в управлении промышленностью, в вопросах боевого использования вооружения. Развитие современного общества характеризуется повышением технического уровня и усложнением организационной структуры производства, углублением общественного разделения труда и развитием кооперирования предприятий. Усложнение связей внутри производства и между предприятиями, в отдельных отраслях хозяйства и между отраслями существенно повышает ответственность каждого оперативного решения. Этим можно объяснить все возрастающий интерес к обоснованной постановке организационных вопросов и к использованию точных методов решения проблем управления и планирования.

Формализация постановки организационных вопросов показывает, что решение задач управления и планирования, как правило, сводится к выбору системы параметров (обычно называемых параметрами управления), ограниченных некоторыми условиями и обращающих в минимум (или в максимум) определенную функцию этих параметров — показатель качества управления. В тех случаях, когда показатель качества может быть выражен линейно через параметры управления, а ограничения записываются в виде линейных равенств или неравенств относительно искомых величин, выбор оптимальной системы параметров управления является предметом линейного программирования. Следует сказать, что по крайней мере в первом приближении в рамки линейного программирования укладывается огромное количество самых разнообразных задач перспективного и оперативного планирования хозяйства, управления различного рода производственными



и технологическими процессами и организации бесперебойной целеустремленной работы комплексов оборудования. Этим обусловлено внимание, уделяемое в настоящее время у нас и за рубежом разработке и внедрению методов линейного программирования.

Книга С. Гасса «Линейное программирование (методы и приложения)» является одной из первых монографий, посвященных систематическому изложению и обоснованию вычислительных методов линейного программирования. Книга написана не для тех, кто участвует в разработке и усовершенствовании методов этой новой математической дисциплины, а для специалистов, использующих подобные методы в своей практической деятельности. Монография представляет собой обработанный курс лекций для аспирантов высшей сельскохозяйственной школы. Отсюда и построение книги, характер изложения материала, обилие примеров и упражнений. Из основных методов линейного программирования здесь подробно изложены только симплексный метод (в отечественной литературе он называется методом последовательного улучшения плана) и его модификация. Значительно меньше внимания и места уделяется так называемому двойственному симплексному методу.

В книге приводится ряд практических рекомендаций, позволяющих упростить применение изложенных в ней алгоритмов к решению конкретных задач. Усвоение описанных методов и алгоритмов не требует специальной математической подготовки. Все вопросы, выходящие за рамки элементарного курса математики, вынесены в отдельную главу.

Автор является видным специалистом по линейному программированию. Ему принадлежит разработка параметрического программирования — экономного метода решения задач линейного программирования, в которых показатель качества или ограничения линейно зависит от параметра. Этому важному для приложений вопросу в книге посвящена отдельная глава.

Определенное внимание автор уделяет и теоретическим проблемам линейного программирования. В частности, в книге приводится относительно элементарное изложение проблемы двойственности и подробно (значительно подробнее, чем это требуется в книге подобного назначения) обсуждаются вопросы вырожденности и заикливания в задачах линейного

программирования. При первом чтении гл. 7 может быть опущена, тем более, что, по утверждению автора, многолетний опыт практических вычислений ни разу не привел еще к зацикливанию, а искусственный пример зацикливания построен не без труда.

Сущность транспортной задачи — одной из важнейших частных задач линейного программирования — и приложение симплексного метода к ее решению изложены в книге достаточно подробно. Однако алгоритмизация вычислений, учитывающая особенность транспортной задачи, в книге отсутствует, что известным образом снижает практическую ценность гл. 10.

Из практических задач, рассмотренных в книге, особый интерес представляет задача линейного программирования, к которой сводится анализ межотраслевых связей, основанный на модели Леонтьева. Следует полагать, что планирование отдельных отраслей производства, обеспечивающее наиболее экономное или быстрее удовлетворение потребности в определенных продуктах, еще длительное время будет одним из основных стимулов совершенствования методов линейного программирования, да и не только линейного программирования.

Последняя глава книги посвящена связи линейного программирования и теории игр и носит в основном конспективный характер. Глава не представляет специального интереса, поскольку методы решения игр, которые могли бы быть полезны для решения соответствующих задач линейного программирования, в ней не рассмотрены.

В историческом обзоре монографии Гасса, как, впрочем, и в большинстве зарубежных исследований по линейному программированию, не отмечены работы советских ученых, которые были опубликованы задолго до появления термина «линейное программирование» и иностранных статей по оптимальному распределению ограниченных ресурсов. Книга не лишена и некоторых, правда, не весьма существенных недостатков: не все определения достаточно четки, в некоторых доказательствах используются утверждения, не вытекающие из предыдущего, и т. д. При переводе замеченные изъяны были устранены. Кроме того, при переводе многие термины были заменены соответствующими названиями, принятыми в отечественной литературе.

Библиография автора дополнена лишь той литературой, на которую были ссылки в подстрочных примечаниях редактора (ссылки на эту литературу помечены буквой *р*). Достаточно полную библиографию отечественных и зарубежных работ по линейному программированию читатель может найти в книге [1*р*].

Следует полагать, что предлагаемая книга будет весьма полезна широкому кругу специалистов, связанных с планированием народного хозяйства и управлением производственными процессами.

*Д. Б. Юдин*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Материал, лежащий в основе этой книги, первоначально входил в вводный курс линейного программирования, который читался в аспирантуре при департаменте земледелия в Вашингтоне. При развитии и обработке записей я стремился достичь тех же основных целей, которые преследовались и при чтении курса, а именно постепенно научить слушателей распознавать задачи линейного программирования, формулировать их как математические модели, применять для их решения соответствующие вычислительные методы и понимать математические основы теории линейного программирования.

Содержание книги весьма удобно рассматривать в трех различных, хотя и не выраженных четко, аспектах: теоретическом, вычислительном и прикладном. В этих аспектах я находил целесообразным для изучающих комбинировать материал при чтении курса. Так, после первой лекции по приложениям и математическим моделям линейного программирования (гл. 1) развивалась теория выпуклых множеств и линейных неравенств, завершавшаяся изложением метода исключения для решения систем линейных уравнений (гл. 2). После этого рассматривались свойства решения общей задачи линейного программирования. Затем для более полного уяснения принципов симплексного метода было показано, что нахождение экстремальных решений производится с помощью несколько видоизмененного метода исключения Жордана и Гаусса (гл. 3). В последующих лекциях рассматривались и развивались теоретические и вычислительные элементы симплексного метода Дж. Б. Данцига (гл. 4). Рассмотрение проблем двойственности в линейном программировании (гл. 5) завершалось лекциями, в которых формулировались различ-

ные поучительные приложения. В заключительных лекциях курса (состоявшего из 16 лекций) рассматривалась связь между линейным программированием и парной игрой с нулевой суммой (гл. 12).

После некоторой переработки основной курс был дополнен подробным изложением модифицированного симплексного метода (гл. 6), рассмотрением вырожденных задач (гл. 7), параметрического программирования (гл. 8), дополнительных вычислительных приемов (гл. 9), а также и другими вопросами и приложениями. Весь материал по замыслу автора распадается на три части: введение, методы (теория и алгоритмы) и приложения. Мне кажется, что такое расположение материала повышает ценность книги как справочного пособия и помогает осветить все три аспекта линейного программирования (теоретический, вычислительный и прикладной) в связанной, хотя и несколько разностильной манере изложения. Вследствие этого читатель найдет, что некоторые вопросы сравнительно сложного характера, как модифицированный симплексный метод и параметрическое линейное программирование, излагаются раньше общего рассмотрения транспортной задачи и основных приложений. Предполагается, таким образом, что при систематическом изучении линейного программирования\*) главы книги не следует читать в порядке их нумерации. После проработки гл. 1—5 можно начать знакомиться с материалом глав, посвященных приложениям\*\*).

Я полагаю, что материал, изложенный в этой книге, соответствует математической подготовке студентов старших курсов и аспирантов первого года обучения. Однако вследствие интереса к методам линейного программирования со стороны лиц, не имеющих соответствующей математической подготовки, мне казалось целесообразным включить в книгу краткое изложение теории матриц и векторных пространств, что, как мне кажется, должно сделать книгу общедоступной (гл. 2). Отметим, кстати, что большинство математических

---

\*) Автор имеет в виду лиц, интересующихся приложениями. (Прим. ред.)

\*\*) В курсе, читавшемся трижды в неделю, одна лекция посвящалась приложениям и (или) разбору вопросов по изучению дополнительной литературы.

формул, используемых в последующих главах, выводится в гл. 2 \*).

Поисками экстремальных решений разнообразных задач люди занимались столетиями. Так, Евклид в книге III рассматривал нахождение наибольшей и наименьшей длин отрезка прямой, проведенной из точки к окружности, а в книге IV описал, как найти параллелограмм максимальной площади при данном периметре. Общего подхода к подобным задачам, однако, не было найдено до тех пор, пока великие математики семнадцатого и восемнадцатого веков не создали мощных вычислительных методов и вариационного исчисления. С помощью этих методов можно найти максимальное и минимальное решения широкого круга экстремальных задач. В то время экстремальные задачи возникали из различных геометрических, динамических или физических проблем.

В связи с усложнением организационной структуры современного общества на повестку дня встал новый класс экстремальных задач. Так, теперь мы занимаемся такими проблемами, как наиболее эффективный способ получения экономики, оптимальное развертывание боевой авиации, максимизирующее шансы страны на победу в войне, или имеем дело с такими «земными» задачами, как смешение удобрений для получения агрономических средств наименьшей стоимости. Исследования, в которых формулировались и решались такие задачи, привели к развитию новых важных методов. Они и составляют предмет этой книги — линейное программирование. Модель линейного программирования, т. е. оптимизация линейной формы при соблюдении линейных ограничений, проста по своей математической структуре и вместе с тем может быть применена к широкому кругу приложений.

Исторически общая задача линейного программирования была впервые поставлена в 1947 г. Дж. Б. Данцигом, Маршаллом Вудом и их сотрудниками в департаменте военно-воздушных сил США. В то время эта группа занималась исследованием возможности использования математических и

---

\*) Изучающий обнаружит вскоре, что одна из основных трудностей для понимания линейного программирования проистекает от различия, а иногда и запутанности обозначений, применяющихся в большинстве источников. По возможности я применял «стандартные», последовательные, и, как я надеюсь, точные обозначения.

смежных с ними методов для военных задач и проблем планирования. Это исследование привело Данцига к мысли, «что соотношения между деятельностью различных предприятий можно рассматривать как модель задачи линейного программирования, оптимальное решение которой определяется условием минимальности некоторой линейной формы». В дальнейшем для развития этих идей в ВВС была организована исследовательская группа под названием *Project SCOOP* (группа научных вычислений программ оптимизации). Наряду с проведением программирования для ВВС и решением бюджетных задач на более высоком уровне основным достижением этой группы было формальное развитие и применение модели линейного программирования. Эти ранние применения методов линейного программирования делились на три категории: военные, разрабатываемые группой *Project SCOOP*, межотраслевые экономические, основанные на модели *input — output* (затраты — выпуск) Леонтьева, и задачи, включающие взаимосвязь между парной игрой с нулевой суммой и линейным программированием. Эти области применений за прошедшие 10 лет были расширены и развиты, но центр тяжести приложения линейного программирования переместился в область промышленно-экономических задач.

Первоначально общая математическая задача линейного программирования была поставлена в 1947 г. Данцигом, который предложил для ее решения так называемый симплексный метод. Некоторые задачи, связанные с определением экстремума линейной формы, на переменные которой наложены линейные ограничения, были сформулированы еще раньше. Такими задачами, например, являются транспортная проблема, выдвинутая Хичкоком (1941 г.) и независимо от него Купмансом (1947 г.), и задача о диете Стиглера (1945 г.). Первое успешное решение задачи линейного программирования на быстродействующей электронной вычислительной машине марки *SEAC* было проведено в Национальном бюро стандартов в январе 1952 г. После этого симплексный алгоритм был спрограммирован для большинства крупных и средних электронных вычислительных машин общего назначения в США и Англии.

Линейное программирование становится важным инструментом современной теоретической и прикладной математики. Своим таким бурным развитием оно обязано творческим

усилиям многих исследователей и исследовательских организаций \*). В частности, хотелось бы особо упомянуть Дж. Б. Данцига, Мюррея А. Гейслера, Леона Гольдстейна, Юлиана Л. Холлея, Вальтера В. Джекобса, Алекса Орден, Эмиля Д. Шелла и Маршалла К. Вуда, работавших в департаменте ВВС США; Леона Гейнена, Алана И. Гофмана и Соломона Поллака из Национального бюро стандартов, а также исследовательские группы при аспирантуре индустриального управления института технологии Карнеджи, *RAND corporation*, математическом факультете Принстонского университета и комиссии Коулса по исследованиям экономики. Хотелось бы поблагодарить вышеупомянутых лиц, а также других авторов и их издателей за любезное разрешение использовать при написании этой книги некоторые основные работы по линейному программированию как источники. Соответствующие ссылки даны в тексте.

Хотелось бы также выразить признательность за первое одобрение текста этой книги, полученное от моих прежних сотрудников из директората Управления исследований департамента военно-воздушных сил США и поблагодарить Гарольда Фасберга, Вальтера В. Джекобса и Томаса Л. Саати за очень ценные советы. Особую благодарность хочется выразить м-с Фелма Чеслей за блестящую перепечатку рукописи.

Саул И. Гасс

---

\*) Большой вклад в теорию линейного программирования внесли ленинградские математики Л. В. Канторович и др. Ряд их работ [Зр, 4р] был опубликован до появления первых американских статей по линейному программированию. (Прим. ред.)

---





# ЧАСТЬ I

## ВВЕДЕНИЕ

---

### ГЛАВА I

#### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Задачи линейного программирования

Задачи программирования связаны с вопросами эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей. Характерной чертой таких задач является большое число решений, удовлетворяющих их основным условиям. Выбор частного решения, как наилучшего, зависит от целевых установок поставленной задачи. Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее целевым установкам, называется *оптимальным планом*.

Типичным примером такой задачи является проблема, стоящая перед предпринимателем, который должен определить, какую комбинацию доступных ему средств следует выбрать, чтобы не только обеспечить выпуск продукции по графику, но получить также и максимальную прибыль. Основным условием этой задачи является ограниченность имеющихся в распоряжении предпринимателя ресурсов, а основной целью — стремление увеличить прибыль до максимума.

Мы будем рассматривать только весьма узкий подкласс задач программирования — так называемые задачи *линейного программирования*. Последние отличаются от общей совокупности задач программирования тем, что соответствующая им *математическая модель* может быть записана с помощью линейных соотношений, имеющих вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_jx_j + \dots + a_nx_n = a_0,$$

где  $a_j$  обозначает  $j$ -й известный коэффициент, а  $x_j$  —  $j$ -ю независимую переменную. Полная математическая постановка задачи линейного программирования включает систему линейных

уравнений и линейных неравенств, представляющих условия задачи, и линейную форму, выражающую ее целевую установку. Несколько подобных задач будет сформулировано в § 2.

Прежде чем приступить к решению задач линейного программирования, следует остановиться на системах линейных уравнений. Существование решения или решений системы линейных уравнений можно обнаружить с помощью различных критериев (см. [34] \*). Система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

имеет *единственное* решение  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ , тогда как одно уравнение

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad (1.1)$$

имеет *бесчисленное* множество решений. Из (1.1) получаем

$$x_1 = 8 - 2x_2$$

или

$$x_2 = 4 - \frac{1}{2} x_1.$$

Каждому значению  $x_1$  (или  $x_2$ ) соответствует определенное значение  $x_2$  (или  $x_1$ ). Если мы, далее, условимся, что переменные могут принимать только неотрицательные значения, т. е.  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ , то тем самым ограничим области их определения, так как из

$$x_1 = 8 - 2x_2 \geq 0$$

следует

$$0 \leq x_2 \leq 4,$$

а из

$$x_2 = 4 - \frac{1}{2} x_1 \geq 0$$

вытекает

$$0 \leq x_1 \leq 8.$$

Очевидно, что наложение дополнительных ограничений на переменные уравнения (1.1) сужает область их определения,

---

\*) Номера в квадратных скобках относятся к библиографии, помещенной в конце книги.

хотя и не приводит к единственности решения этого уравнения. Как будет показано в дальнейшем, условие неотрицательности переменных является важным требованием в задачах линейного программирования. Системы, подобные (1.1), в которых переменных больше, чем уравнений, называются *неопределенными*. Неопределенные системы линейных уравнений либо вообще не имеют решений, либо имеют их бесчисленное множество.

Один из важных способов нахождения решений неопределенных систем линейных уравнений состоит в приведении их к системам, содержащим уже столько неизвестных, сколько и уравнений, т. е. к *определенным* системам. Этого можно добиться приравнением соответствующего числа переменных нулю. Например, неопределенная система

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

имеет три следующих решения\*):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_1 &= \frac{11}{3}, & x_1 &= 1, \\ x_2 &= \frac{11}{4}, & x_2 &= 0, & x_2 &= 2, \\ x_3 &= -\frac{1}{4}; & x_3 &= \frac{2}{3}; & x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Математически линейное программирование сводится к отысканию неотрицательных решений неопределенных систем линейных уравнений. Как будет показано в последующих главах, нас будут интересовать только те решения неопределенных систем, которые определяются вышеописанным приемом. Если, например, мы примем, что уравнения (1.2) описывают условия задачи линейного программирования, то должны будем рассматривать только два неотрицательных решения (*плана*):

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0; \quad x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}.$$

---

\*) Имеется, конечно, бесчисленное множество решений системы (1.2), которые могут быть получены подстановкой вместо одного из переменных произвольной постоянной; так, при  $x_1 = 5$  мы имеем  $x_2 = -1$  и  $x_3 = 1$ .

Остальные решения теряют смысл, так как не удовлетворяют требованиям неотрицательности или другим условиям, которые будут рассматриваться далее.

Как уже было отмечено выше, общая задача программирования связана с некоторыми целевыми установками, руководящими выбором ее решения. Целевая установка задачи линейного программирования выражается некоторой линейной формой, называемой иногда *функцией цели* \*), причем оптимум этой формы должен достигаться при подстановке выбранного плана. Если от решения системы (1.2) требуется обеспечить максимум линейной формы  $x_1 + x_2 + x_3$ , то из двух неотрицательных решений (1.2) план  $x_1 = \frac{11}{3}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \frac{2}{3}$  является оптимальным, так как при подстановке его в линейную форму значение последней, равное  $\frac{13}{3}$ , превос-

ходит на  $\frac{1}{3}$  значение, полученное при подстановке другого плана. Если же нам нужно получить минимум линейной формы  $x_1 - x_2$ , то оптимальным будет план  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 0$ , обращающий эту форму в  $-1$ . Таким образом, оптимальный план задачи линейного программирования соответствует либо максимуму, либо минимуму некоторой линейной формы (функции цели). Так как максимум линейной формы совпадает с точностью до знака с минимумом другой формы, отличающейся от исходной только знаком, мы не нарушим общности, рассматривая лишь задачи на минимум. Заметим, что, вообще говоря, задача линейного программирования может обладать многими решениями (оптимальными планами), каждое из которых, удовлетворяя условиям задачи, обращает связанную с ней линейную форму в максимум или минимум.

Дадим теперь общую математическую постановку задачи линейного программирования.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \quad (1.3)$$

---

\*) В отечественной литературе чаще встречается термин *критерий (показатель) качества*. (Прим. ред.)

при соблюдении следующих линейных ограничений:

[illegible]

здесь  $a_{ij}$  и  $b_i$  — постоянные. Величины  $c_j$  называют иногда *коэффициентами стоимости*.

Как будет показано в последующих главах, при исследовании задач линейного программирования могут встретиться следующие случаи:

1. Система условий задачи противоречива, так как соответствующая неопределенная система (1.4) не имеет неотрицательных решений.

2. Система (1.4) имеет неотрицательные решения, но максимум (минимум) линейной формы (1.3) равен  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

3. Значение максимума (минимума) линейной формы (1.3) на множестве неотрицательных решений системы (1.4) конечно.

Для задач линейного программирования, связанных с реальными практическими проблемами, обычно имеет место третий случай.

## § 2. Примеры задач линейного программирования

Для иллюстрации применений описанной выше математической модели задачи линейного программирования сформулируем три задачи, которые подвергнутся более подробному обсуждению в части III.

**Транспортная задача.** Предпринимателю надо перевезти некоторое количество единиц однородного товара из различных складов к нескольким магазинам. Каждому из этих магазинов требуется определенное количество единиц товара, при этом и каждый из складов может выделить только определенное количество рассматриваемого товара. Примем следующие обозначения:

$m$  — число складов,

$n$  — число магазинов,

$a_i$  — общее количество единиц товара, выделяемое для перевозки  $i$ -м складом,

$b_j$  — количество единиц товара, необходимое  $j$ -му магазину,

$x_{ij}$  — количество единиц товара, перевозимое с  $i$ -го склада в  $j$ -й магазин.

Предполагается, что общее количество выделяющегося для перевозки товара равно требуемому количеству, т. е.

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

(как будет показано в дальнейшем, такое допущение не является ограничительным). Задача состоит в определении неизвестных перевозок  $x_{ij}$ .

Если составить таблицу, то для случая  $m=2$  и  $n=3$  она будет иметь такой вид:

Склады \ Магазины	1	2	3
	1	2	3
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$

Из этой таблицы видно, что совокупность перевозок с первого склада удовлетворяет линейному уравнению

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1. \quad (2.1)$$

Аналогично для склада 2

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \quad (2.2)$$

Запишем также условия, которые необходимо наложить на перевозки  $x_{ij}$ , направляемые в каждый из трех магазинов:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Предприниматель знает стоимость  $c_{ij}$  перевозки единицы товара от  $i$ -го склада к  $j$ -му магазину. Сделаем дополнительное предположение, что зависимость стоимости перевозки от количества товара — линейная, т. е. стоимость перевозки  $x_{ij}$  единиц товара равна  $c_{ij}x_{ij}$ .

Предпринимателю желательно определить, сколько единиц товара нужно отправить с каждого склада в каждый магазин, чтобы общая стоимость перевозок была минимальна. Функцией цели, таким образом, здесь является линейная форма

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}, \quad (2.4)$$

которую необходимо обратить в минимум. Так как отрицательные значения  $x_{ij}$  соответствуют обратным перевозкам из  $j$ -го магазина к  $i$ -му складу, мы требуем, чтобы все переменные  $x_{ij} \geq 0$ .

Объединяя уравнения (2.1)–(2.3), линейную форму (2.4) и условия неотрицательности переменных, сформулируем транспортную задачу в терминах линейного программирования:

Найти минимум функции стоимости

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_{11} & & \geq 0, \\ & x_{12} & \geq 0, \\ & & x_{13} \geq 0, \\ & & & x_{21} \geq 0, \\ & & & & x_{22} \geq 0, \\ & & & & & x_{23} \geq 0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} & & = a_1, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = a_2, \\ x_{11} & + x_{21} & = b_1, \\ & x_{12} & + x_{22} = b_2, \\ & & x_{13} + x_{23} = b_3. \end{array}$$



Задача планирования производства. Предприниматель имеет в своем распоряжении определенные количества ресурсов разного рода. Эти ресурсы, такие, как сырье, труд и оборудование, необходимы для производства любого из различных товаров или их комбинаций. Предпринимателю известно, сколько единиц  $i$ -го ресурса требуется для производства одной единицы  $j$ -го товара. Ему также известно, каков доход от каждой единицы производимого  $j$ -го товара. Предприниматель, естественно, намерен выпустить такую комбинацию товаров, которая соответствует максимальной прибыли. Примем следующие обозначения:

- $m$  — число ресурсов,
- $n$  — число товаров,
- $a_{ij}$  — число единиц  $i$ -го ресурса, необходимое для производства единицы  $j$ -го товара,
- $b_i$  — максимальное число единиц  $i$ -го ресурса, имеющееся в распоряжении предпринимателя,
- $c_j$  — доход от единицы  $j$ -го товара,
- $x_j$  — запланированный предпринимателем уровень производства  $j$ -го товара,
- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — общий план производства.

Общее количество  $i$ -го ресурса, используемого согласно общему плану производства  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , равно

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

Так как эта величина не должна превосходить запаса (наличия)  $i$ -го ресурса, получаем для каждого  $i$  линейное неравенство вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Поскольку отрицательные значения  $x_j$  не имеют практического смысла, требуем, чтобы

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Доход, получаемый от производства  $x_j$  единиц  $j$ -го товара, равен  $c_j x_j$ .

Задача состоит в отыскании плана  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющего условиям

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \geq 0, \\ & x_2 & \geq 0, \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & x_n \geq 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

и обращающего функцию дохода

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

в максимум.

Как будет показано ниже, эта задача легко сводится к задаче типа (1.3) и (1.4) и, следовательно, может рассматриваться как другая формулировка общей задачи линейного программирования.

**Проблема диеты.** Пусть нам известно содержание жизненно необходимых химических веществ в имеющихся в нашем распоряжении продуктах. Например, мы можем знать, сколько миллиграммов фосфора или железа содержится в единице каждого из них. Если скоро известна цена единицы продукта, задача заключается в определении такой диеты, которая, удовлетворяя минимальной дневной потребности в каждом химическом веществе, обращает в минимум общую стоимость используемых продуктов. Введем обозначения:

$m$  — число химических веществ,

$n$  — число имеющихся в распоряжении различных видов продуктов,

$a_{ij}$  — количество единиц  $i$ -го химического вещества, содержащегося в единице  $j$ -го продукта,

$b_i$  — минимальная дневная потребность в  $i$ -м химическом веществе,

$c_j$  — стоимость единицы  $j$ -го продукта,

$x_j$  — количество единиц  $j$ -го продукта, используемое в диете  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Общее количество  $i$ -го химического вещества, содержащегося во всех используемых согласно упомянутой диете продуктах, равно

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Поскольку каждое из этих количеств ( $i=1, 2, \dots, m$ ) не может быть меньше минимальной дневной потребности в  $i$ -м химическом веществе, данная задача линейного программирования состоит в достижении минимума функции стоимости

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \geq 0, \\ & x_2 & \geq 0, \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & x_n & \geq 0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \geq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \geq & b_2, \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \geq & b_m. \end{array}$$

### З а м е ч а н и я

Читатель может дополнительно ознакомиться с вводным материалом по работам Дорфмана [38], Купера и Чарнеса [16], Гендерсона и Шлейфера [55] и директората Управления анализов [36]. Нематематическое описание некоторых приложений линейного программирования приведено в гл. 11.

### У п р а ж н е н и я

Сформулировать математически следующие задачи линейного программирования и попытаться определить оптимальный план, сравнивая различные варианты.

1. Предприниматель имеет центры распределения, находящиеся в Атланте, Чикаго и Нью-Йорке. Эти центры имеют в распоряжении соответственно 40, 20 и 40 единиц некоторого однородного товара. Рынкам сбыта требуются следующие количества единиц товара: Кливленду 25, Луисвиллю 10, Мемфису 20, Питтсбургу 30 и Рич-

монду 15. Стоимость перевозки единицы товара между каждым центром и рынком в долларах указана в следующей таблице:

	Кливленд	Луисвилль	Мемфис	Питтсбург	Ричмонд
Атланта	55	30	40	50	40
Чикаго	35	30	100	45	60
Нью-Йорк	40	60	95	35	30

2. Мебельный фабрикант хочет определить, сколько столов, стульев, бюро и книжных шкафов он должен выпустить, чтобы оптимально использовать имеющиеся в его распоряжении ресурсы. При изготовлении этих товаров используются два различных типа досок, причем предприниматель имеет в наличии 1500 футов досок первого типа и 1000 футов досок второго типа. Для всей работы он располагает 800 человеко-часами. Конъюнктура рынка и его прежние заказы дают основание предполагать, что необходимо изготовить по крайней мере 40 столов, 130 стульев, 30 бюро и не более 10 книжных шкафов. Для изготовления каждого стола, стула, бюро и книжного шкафа требуется 5, 1, 9 и 12 футов досок первого типа и 2, 3, 4 и 1 фут досок второго типа. Для изготовления стола требуется 3 человеко-часа, стула — 2, бюро — 5 и книжного шкафа — 10. Предприниматель получает 12 долларов прибыли от стола, 5 — от стула, 15 — от бюро и 10 — от книжного шкафа. Предприниматель хочет получить максимальный доход при соблюдении указанных условий.

---

## ГЛАВА 2

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Для развития и понимания теоретических и вычислительных аспектов линейного программирования необходимо знание основных понятий и методов некоторых разделов математики. В настоящей главе даются только те элементы этих разделов, которые облегчают усвоение основного курса, используются в последующих главах или будут помогать читателю при практическом применении линейного программирования.

#### § 1. Матрицы и определители

*Матрицей* называется прямоугольная таблица, состоящая из  $mn$  чисел, расположенных в  $m$  строках и  $n$  столбцах в виде

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Такая таблица обычно заключается в круглые скобки и называется матрицей  $A$ . Величины  $a_{ij}$  называются *элементами* матрицы. Часто матрицу  $A$  записывают в виде  $(a_{ij})$ . Для любых  $m, n$  и элементов  $a_{ij}$  мы имеем, таким образом,

$$A = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = (a_{ij}).$$

Матрица  $A$  называется *квадратной*, если  $m = n$ , и в этом случае говорят, что она имеет *порядок*  $n$ .

*Вектором-столбцом* назовем матрицу, состоящую только из одного столбца; аналогично *вектором-строкой* — матрицу, содержащую лишь одну строку. Если все элементы квадратной матрицы, расположенные вне ее главной диагонали, равны нулю, матрицу называют *диагональной*.

*Единичной* или *тождественной* матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1. Единичная матрица порядка  $n$  обозначается через  $I_n$  или просто через  $I$ . При  $n=3$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Транспонированной* по отношению к  $A$  назовем матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

получающуюся из  $A$  заменой строк столбцами.

Две матрицы *равны* в том и только в том случае, если равны их соответствующие элементы. Очевидно, что размерности  $m$  и  $n$  строк и столбцов равных матриц должны совпадать.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если ее элементы  $a_{ij}$  для всех  $i > j$  (или для всех  $i < j$ ) равны нулю.

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

является треугольной.

Матрица  $A$  называется *симметрической*, если  $A=A'$ , т. е.  $a_{ij}=a_{ji}$  при любых  $i, j$ . Если  $A=-A'$ , т. е.  $a_{ij}=-a_{ji}$ , матрица  $A$  называется *кососимметрической*. Из определения вытекает, что все элементы главной диагонали кососимметрической матрицы равны нулю.

Все элементы так называемой *нулевой* матрицы, обозначаемой  $O=(0)$ , равны нулю. В последующих главах  $O=(0)$  будет также применяться либо для обозначения нулевого вектора-столбца, либо нулевой вектор-строки.

Определим теперь операции сложения матриц и умножения матриц на скаляр. Пусть даны некоторый скаляр  $\alpha$  и произвольная матрица  $A$ . Их произведение  $\alpha A$  определяется как

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{ij}).$$

Сумма  $A+B=C$  матриц  $A$  и  $B$ , каждая из которых содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов, определяется как

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij}). \end{aligned}$$

Операции умножения скаляра на матрицу и сложения матриц обладают следующими свойствами:

- а)  $(A+B)+C=A+(B+C)$  (*ассоциативный закон*);
- б)  $A+B=B+A$  (*коммутативный закон*);
- в)  $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ ,  $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$  (*дистрибутивный закон*);
- г)  $A+O=A$ .

Здесь матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют размерности  $m \times n$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — скаляры.

Произведение двух матриц  $A$  и  $B$  определяется только при условии, что число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ . При этом условии элементы произведения  $AB=C$  определяются следующим образом:

*Элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на*

соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ . Например,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C,$$

где  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$ .

Произведением матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  на матрицу  $B$  размерности  $n \times q$  является матрица размерности  $m \times q$ . Читатель может легко проверить, что произведение матриц некоммукативно, т. е., вообще говоря,  $AB \neq BA$ .

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

- а)  $(AB)C = A(BC)$  (ассоциативный закон);
- б)  $(A+B)C = AC + BC$ ,  $C(A+B) = CA + CB$  (дистрибутивный закон);
- в)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ;
- г)  $AI = IA = A$ ;

здесь матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $I$  имеют соответствующие размерности и  $\alpha$  — скаляр. Отметим, что  $(AB)' = B'A'$ .

Каждой квадратной матрице  $A$  соответствует число, называемое ее *определителем*. Определитель матрицы  $A$ , обозначаемый через  $|A|$ , образуется суммированием всех таких произведений ее элементов, в каждом из которых имеется по одному и только по одному элементу из каждой строки и столбца матрицы  $A$ , причем перед каждым произведением ставится знак плюс или минус согласно следующему правилу:

Соединим элементы данного произведения попарно отрезками прямых, как это показано далее для случая матрицы третьего порядка. Если среди полученных отрезков нет отрезков, поднимающихся слева направо, или число таких отрезков четно, произведение имеет знак плюс; в противном случае ставится знак минус. (Каждый определитель содержит  $n!$  таких произведений, где  $n$  — порядок матрицы \*).

---

\*) Через  $n!$  обозначают произведение

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1,$$

называемое *факториалом* числа  $n$ . По определению  $0! = 1$ .



При  $n = 3$  имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Линии, нанесенные на таблице определителя, соответствуют определению знака третьего его члена.

Определители обладают следующими свойствами:

1. Если каждый элемент некоторой строки или некоторого столбца определителя равен нулю, то величина самого определителя равна нулю.

2. Значение определителя не изменится при замене его строк столбцами (при транспонировании соответствующей матрицы).

3. Если  $|B|$  — определитель матрицы, образованной из  $A$  перестановкой двух ее строк или столбцов, то  $|B| = -|A|$ .

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю.

5. Умножение всех элементов некоторой строки или столбца определителя на число  $k$  приводит к увеличению определителя в  $k$  раз.

6. Величина определителя не изменится, если к каждому элементу некоторой строки или столбца прибавить произведение соответствующих элементов другой строки или столбца на число  $k$ .

*Рангом* матрицы  $A$  назовем порядок наибольшей квадратной подматрицы, содержащейся в  $A$ , определитель которой отличен от нуля.

Квадратная матрица называется *неособенной*, если ее определитель не равен нулю. Если  $|A| = 0$ , то матрицу будем называть *особенной*.

*Минором*  $D_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называют определитель матрицы, получаемой из квадратной матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

*Алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  назовем  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ . Таким образом, алгебраическое дополнение  $A_{ij}$  совпадает с точностью до знака с соответствующим минором матрицы  $A$ .

*Присоединенной* матрицей к квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  называется такая матрица  $J = (A_{ji})$ , элементом  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца которой является алгебраическое дополнение элемента  $a_{ji}$  матрицы  $A$ . Имеем:

$$J = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $B$  называется *обратной* по отношению к квадратной матрице  $A$ , если  $AB = I$ . Матрица, обратная матрице  $A$ , обозначается через  $A^{-1}$ . Для каждой неособенной матрицы  $A$  существует единственная матрица  $A^{-1}$  такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Можно показать, что, если  $|A| \neq 0$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} J.$$

Мы видим, что лишь неособенная квадратная матрица обладает обратной. Отметим также, что  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## § 2. Векторы и векторные пространства

На обычной двумерной евклидовой плоскости точкам соответствуют упорядоченные пары действительных чисел  $U = (u_1, u_2)$ .  $U$  можно рассматривать как точку с координатами  $(u_1, u_2)$  относительно некоторой выбранной системы координат с началом в точке  $O = (0, 0)$  или как вектор с проекциями  $u_1, u_2$  (рис. 1). Эти две интерпретации равнозначны. Мы будем иногда писать  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ .

Обозначим двумерное евклидово пространство через  $E_2$  и сформулируем важнейшие свойства векторов из этого пространства.

1. Произведением вектора  $U$  на скаляр  $\alpha$  называется вектор  $V = \alpha U = (\alpha u_1, \alpha u_2)$  (рис. 2). При этом

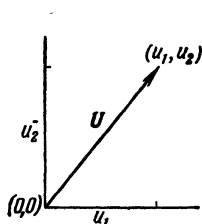


Рис. 1.

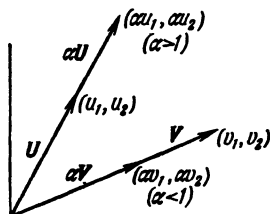


Рис. 2.

- а)  $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$  (ассоциативный закон);
- б)  $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$ ,  $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$  (дистрибутивный закон);
- в)  $1 \cdot U = U$ ;
- г)  $0U = O = (0, 0)$ .

2. Суммой векторов  $U = (u_1, u_2)$  и  $V = (v_1, v_2)$  называется вектор  $W = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$  (рис. 3). При этом

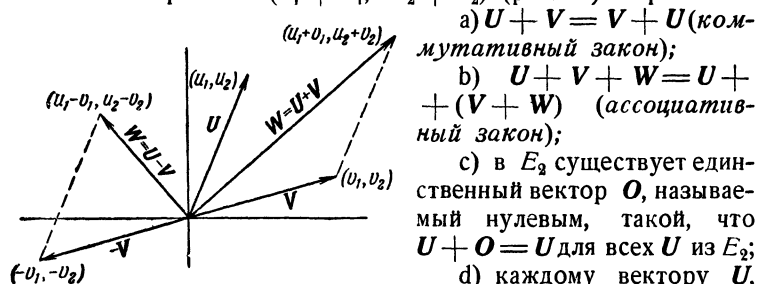


Рис. 3.

- а)  $U + V = V + U$  (коммутативный закон);

- б)  $U + V + W = U + (V + W)$  (ассоциативный закон);

- в) в  $E_2$  существует единственный вектор  $O$ , называемый нулевым, такой, что  $U + O = U$  для всех  $U$  из  $E_2$ ;

- г) каждому вектору  $U$ , принадлежащему  $E_2$ , соответствует такой единственный

вектор, называемый противоположным к  $U$  и обозначаемый  $-U$ , что  $U + (-U) = O$ .

3. Скалярное произведение векторов. Каждой паре векторов  $U$  и  $V$  из  $E_2$  соответствует действительное число, называемое их скалярным произведением и записываемое как  $(U, V) = u_1 v_1 + u_2 v_2$ . При этом

- а)  $(U, V) = (V, U)$  (коммутативный закон);
- б)  $(\alpha U + \beta V, W) = \alpha(U, W) + \beta(V, W)$  для всех скаляров  $\alpha, \beta$  и векторов  $U, V$  и  $W$  из  $E_2$ ;

с)  $(U, U) \geq 0$  и  $(U, U) = 0$  в том и только в том случае, если  $U = O$ .

4. *Длина вектора* (рис. 4). Каждому вектору  $U$ , принадлежащему  $E_2$ , соответствует действительное число, называемое *длиной* вектора  $U$ , вида

$$|U| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

При этом

а)  $|U| \geq 0$  и  $|U| = 0$  в том и только в том случае, если  $U = 0$ ;

б)  $|\alpha U| = |\alpha| |U|$ ;

с)  $|U + V| \leq |U| + |V|$  для любых  $U$  и  $V$ , принадлежащих  $E_2$ , т. е. длины векторов удовлетворяют неравенству треугольника;

д)  $|U| = +\sqrt{(U, U)}$ .

5. *Расстояние между векторами*. Каждой паре векторов  $U, V$ , принадлежащих  $E_2$ , соответствует действительное число  $d(U, V)$ , называемое *расстоянием* между  $U$  и  $V$ , вида

$$d(U, V) = |U - V| = +\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Систему векторов  $U_1, U_2, \dots, U_n$  назовем *линейно независимой*, если равенство

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n = 0$$

возможно лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

В противном случае система векторов называется *линейно зависимой*. Например, система двух векторов

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима. Чтобы показать это, запишем

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

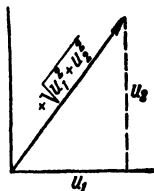


Рис. 4.

Так как в последнем уравнении соответствующие компоненты двух векторов-столбцов должны быть равны, получаем:

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 0.$$

Аналогичным способом можно показать, что система векторов

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно зависима. Имеем:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что  $\alpha_3 = -\alpha_1$  и  $\alpha_3 = -\alpha_2$ . Поэтому, если положить  $\alpha_3 = \alpha$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha$ , то уравнение (2.1) удовлетворяется при любом  $\alpha$ .

Последний пример иллюстрирует свойство пространства  $E_2$ , благодаря которому оно называется *двумерным*. В нем существуют два линейно независимых вектора (например, единичные векторы  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ ), тогда как каждая система из трех векторов линейно зависима. Обобщая это понятие размерности, получим следующее определение:

Объекты, удовлетворяющие свойствам 1—3, называются *векторами*. Совокупность таких объектов-векторов называется  *$n$ -мерным евклидовым пространством  $E_n$* , если в ней существуют  $n$  линейно независимых векторов, но каждые  $n+1$  векторов из этой совокупности линейно зависимы.

Произвольный вектор из  $E_n$  имеет вид

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

и, по аналогии с двумерным случаем,

$$\begin{aligned} \alpha (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) &= (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \dots, \alpha u_n), \\ (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) &= \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \end{aligned}$$

и

$$(U, V) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

*Базисом* пространства  $E_n$  называется система  $n$  линейно независимых  $n$ -мерных векторов. Любой вектор из  $E_n$  может быть единственным образом выражен линейной комбинацией векторов данного базиса. Система  $n$  единичных  $n$ -мерных векторов  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  является базисом пространства  $E_n$ .

Одно линейное соотношение в двумерном пространстве  $E_2$   $(x_1 u_1 + x_2 u_2 = a)$ , где  $x_1, x_2$  и  $a$  — постоянные) определяет линию; одно линейное соотношение в  $E_3$  задает плоскость. Соответствующий объект, определяемый одним линейным соотношением в пространстве  $E_n$ , называется *гиперплоскостью*. Гиперплоскостью  $H(X, a)$  в пространстве  $E_n$  называется система всех таких векторов  $U$ , что  $(X, U) = a$ , где  $X \neq O$  — данный ненулевой вектор и  $a$  — действительное число. Пространство  $E_n$  делится гиперплоскостью на два полупространства, обозначаемых через  $H^+(X, a)$  и  $H^-(X, a)$  и представляющих в первом случае совокупность векторов  $U$ , для которых  $(X, U) \geq a$ , а во втором — совокупность векторов  $U$ , для которых  $(X, U) \leq a$ .

При  $X = (2, -1)$  и  $a = 1$  получаем два полупространства, изображенных на рис. 5:

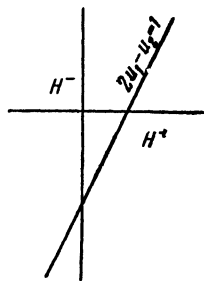


Рис. 5.

$$H^+(X, a) = 2u_1 - u_2 \geq 1$$

и

$$H^-(X, a) = 2u_1 - u_2 \leq 1.$$

Точки прямой  $2u_1 - u_2 = 1$  принадлежат обоим полупространствам.

### § 3. Выпуклые множества

*Выпуклой комбинацией* точек  $U_1, U_2, \dots, U_n$  называется точка

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n,$$

где  $\alpha_i \geq 0$  и  $\sum_i \alpha_i = 1$ . Множество  $S$ , содержащееся в  $E_n$ ,

назовем *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками  $U_1$  и  $U_2$  содержит их произвольную выпуклую комбинацию

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2.$$

Примерами выпуклых множеств является само пространство  $E_n$ , круг, куб. Множество точек, составляющих границу круга (окружность), не является выпуклым.

Если  $C$  — выпуклое множество, то в нем содержится любая выпуклая комбинация произвольного числа его точек. Докажем вначале, что если  $U_1, U_2, U_3$  принадлежат  $C$ , то

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$$

при  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_i \alpha_i = 1$  также принадлежит  $C$ . Пусть

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

для  $i = 1, 2$ . Заметим, что  $\sum_i \alpha'_i = 1$  и  $\alpha'_i \geq 0$ . Имеем

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha'_1 U_1 + \alpha'_2 U_2) + \alpha_3 U_3.$$

По предположению  $\alpha'_1 U_1 + \alpha'_2 U_2$  принадлежит  $C$ . Пусть

$$U_4 = \alpha'_1 U_1 + \alpha'_2 U_2.$$

Тогда

$$U = (\alpha_1 + \alpha_2) U_4 + \alpha_3 U_3$$

является выпуклой комбинацией двух точек из  $C$  и, следовательно, принадлежит  $C$ . Это доказательство можно обобщить на любое  $i$ .

**Теорема 1.** Любая точка отрезка, соединяющего две точки из  $E_n$ , является выпуклой комбинацией этих точек.

**Доказательство.** Обозначим рассматриваемые точки через  $U$  и  $V$ . Пусть  $W$  лежит на отрезке

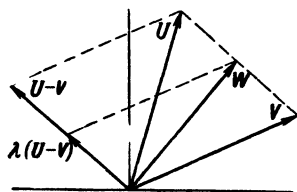


Рис. 6.

соединяющем  $U$  и  $V$ . Этот отрезок параллелен прямой, определяемой вектором  $U - V$  (рис. 6). По правилам сложения

ния векторов имеем при некотором  $0 \leq \lambda \leq 1$

$$V + \lambda(U - V) = W$$

или

$$(1 - \lambda)V + \lambda U = W.$$

Последнее равенство выражает точку  $W$  в виде выпуклой комбинации  $U$  и  $V$ .

**Теорема 2** (обратная к теореме 1). *Любая точка, которую можно представить в виде выпуклой комбинации двух точек из  $E_n$ , лежит на отрезке, соединяющем эти точки.*

**Доказательство.** Имеем

$$W = (1 - \lambda)V + \lambda U$$

или

$$W - V = \lambda(U - V),$$

где  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Отсюда вытекает, что вектор  $W - V$  образуется из вектора  $U - V$  умножением на  $\lambda$ , и, следовательно, эти два вектора не могут быть расположены так, как изображено на рис. 7. Вектор  $W - V$  должен совпадать по направлению с вектором  $U - V$ . Так как отрезки, соединяющие  $U$  с  $V$  и  $W$  с  $V$ , параллельны линиям, определяемым векторами

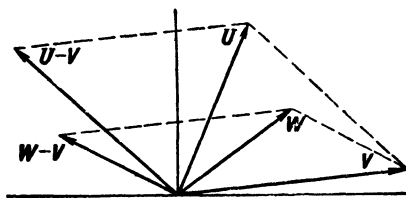


Рис. 7.

$U - V$  и  $W - V$  соответственно, то точка  $W$  должна лежать на отрезке, соединяющем  $U$  и  $V$ . Теоремы 1 и 2

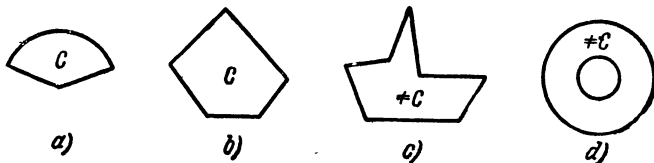


Рис. 8.

определяют геометрические характеристики выпуклых множеств. Выпуклое множество обязательно должно содержать отрезок, соединяющий любые две его точки. Множества,



изображенные на рис. 8,  $a$ ,  $b$  — выпуклые, а множества на рис. 8,  $c$ ,  $d$  не являются выпуклыми.

Точка  $U$  выпуклого множества  $S$  называется *крайней*, если она не может быть выражена в виде выпуклой комбинации каких-либо двух различных точек этого множества. Каждая точка границы круга является его крайней точкой. Выпуклое множество, не содержащее ни одной граничной точки, не может иметь и крайних точек. Крайними точками треугольника являются его вершины.

*Выпуклой оболочкой*  $C(S)$  любого множества  $S$  называется совокупность всевозможных выпуклых комбинаций, составленных из точек множества  $S$ .  $C(S)$  является наименьшим выпуклым множеством, содержащим  $S$ . Если  $S$  состоит из восьми вершин куба, то  $C(S)$  совпадает со всем кубом; если  $S$  — окружность, то  $C(S)$  — полный круг.

Если множество  $S$  состоит из конечного числа точек, его выпуклая оболочка  $C(S)$  называется *выпуклым многогранником*. Например, куб, являющийся выпуклой оболочкой своих восьми вершин, — выпуклый многогранник.

Множество векторов  $S$  называется *конусом*, если для каждого вектора  $U$  из  $S$  вектор  $\lambda U$  при любом неотрицательном  $\lambda$  принадлежит  $S$ . Примерами конусов являются все пространство, начало координат и множество  $S$ , изображенное на рис. 9. Отметим, что любой конус содержит начало координат, так как  $\lambda$ , в частности, может равняться нулю.

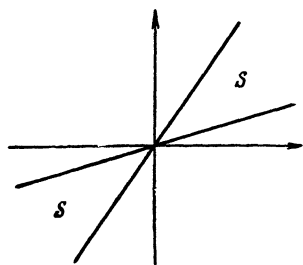


Рис. 9.

Конус, являющийся выпуклым множеством, называется *выпуклым*. Конус, изображенный на рис. 9, не является выпуклым.

Выпуклой будет лишь часть этого конуса, расположенная в первом квадранте.

*Симплексом* называется  $n$ -мерный выпуклый многогранник, имеющий в точности  $n + 1$  вершин. Граница симплекса содержит симплексы низших порядков, называемые *гранями*. Число таких граней размерности  $i$  равно  $C_{n+1}^i$ . Симплексом нулевой размерности является точка, одномерным симплексом — отрезок, двумерным — треугольник и трехмерным —

тетраэдр. Уравнение симплекса, отсекающего на координатных осях единичные отрезки, имеет такой вид:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1. \end{aligned}$$

При  $n=3$  получаем треугольник с вершинами  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ .

#### § 4. Линейные неравенства

Рассмотрим следующую систему пяти линейных неравенств с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad & x \geq 0, \\ \text{b)} \quad & y \geq 0, \\ \text{c)} \quad & x + y \geq 1, \\ \text{d)} \quad & x - y \geq 1, \\ \text{e)} \quad & -x + 2y \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Попытаемся определить, какие точки  $(x, y)$  двумерного евклидова пространства удовлетворяют системе (4.1). Отметим

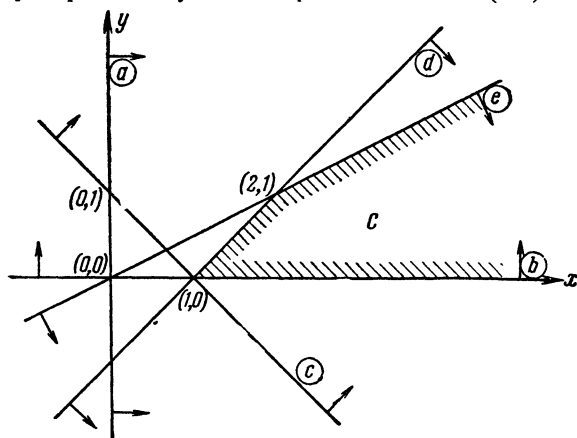


Рис. 10.

сначала (рис. 10), что первые два неравенства ограничивают область наших поисков положительным квадрантом, другими

словами, необходимо рассматривать лишь точки с неотрицательными координатами. В самом деле, неравенство (4.1a) удовлетворяется только в точках, лежащих на оси  $x=0$  или справа от нее; неравенство (4.1b) удовлетворяется только в точках, лежащих на оси  $y=0$  или выше ее. Таким образом, обоим неравенствам удовлетворяют лишь точки первого квадранта. Каждому неравенству удовлетворяют точки плоскости, расположенные по одну сторону от прямой, на которой рассматриваемое неравенство удовлетворяется как равенство. Полуплоскости решений каждого из неравенств изображены на рис. 10 с помощью стрелок, проведенных от граничных прямых внутрь соответствующих полуплоскостей.

Рассмотрим теперь прямую  $x+y=1$ , в точках которой неравенство (4.1c) переходит в равенство. Мы замечаем, что полуплоскость, содержащая все решения неравенства (4.1c), лежит выше и справа от этой линии, откуда, в частности, следует, что начало координат  $(0, 0)$  не удовлетворяет рассматриваемому неравенству. Множеством решений неравенств (4.1a—c) является та часть положительного квадранта, точки которой одновременно удовлетворяют всем трем неравенствам. Для неравенства (4.1d) проводим линию  $x-y=1$  и отмечаем, что полуплоскость, точки которой удовлетворяют неравенству, не содержит начала координат. Соответствующая неравенству (4.1e) прямая  $-x+2y=0$  содержит начало координат. Для того чтобы определить, какая из образованных ею полуплоскостей является полуплоскостью решений, возьмем любую точку, скажем  $(1, 0)$ , и определим, удовлетворяет она неравенству (4.1e) или нет. Так как точка  $(1, 0)$  удовлетворяет (4.1e), полуплоскость, содержащая ее, является искомой. Всем пяти неравенствам удовлетворяет совокупность точек, ограниченная линиями со штриховкой.

Полной совокупностью решений системы неравенств (4.1) является, таким образом, множество  $S$ , представляющее собой выпуклую многогранную область, ограниченную прямыми, соответствующими неравенствам (4.1b), (4.1d) и (4.1e). Неравенства (4.1a) и (4.1c) не участвуют в определении области решений рассматриваемой системы неравенств. Они являются лишними в системе (4.1), но этот факт удалось выяснить лишь после соответствующего исследования.

Как уже отмечалось, каждое из неравенств системы (4.1) определяет некоторую прямую в двумерном пространстве.

Если записать систему неравенств (4.1) в матричной форме, то можно получить для нее другую интерпретацию. Возьмем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

состоящую из коэффициентов системы (4.1), и напомним матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

При умножении матрицы  $A$  на вектор-столбец, компонентами которого являются  $x$  и  $y$ , получается пять неравенств первоначальной системы. Заметим, что неравенство (4.1e) было предварительно умножено на  $(-1)$  для изменения его знака.

Обозначим первый столбец матрицы  $A$  через  $P_1$ , второй — через  $P_2$ , т. е.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Систему (4.2) тогда можно записать в виде

$$P_1 x + P_2 y \geq P_0. \quad (4.3)$$

Здесь векторы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_0$  рассматриваются как точки пятимерного пространства, и задача заключается в определении





достигает своего минимума. На рис. 11 проведены пунктиром прямые

$$2x + 2y = a$$

при  $a = 12, 6$  и  $2$ . Пересечения этих прямых с множеством  $S$  изображены сплошными линиями, причем последняя из них вырождается в точку. Каждая точка  $(x, y)$  первой линии пересечения соответствует значению линейной формы, равному  $12$ ,

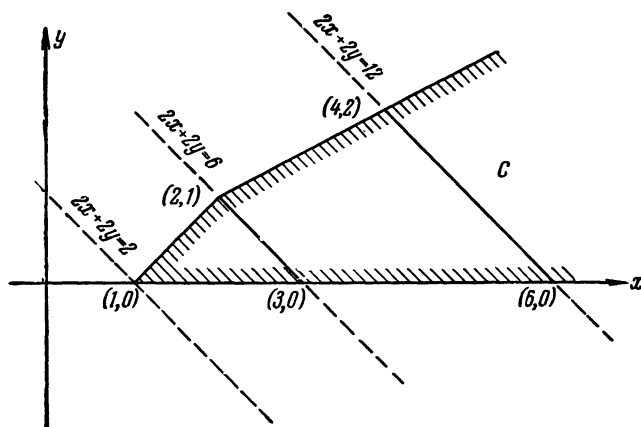


Рис. 11.

все точки второй линии — значению  $6$  и, наконец, последняя линия пересечения, содержащая лишь точку  $(1, 0)$ , соответствует минимальному значению линейной формы, равному  $2$ . Следовательно, из бесконечного числа точек, содержащихся в  $S$ , лишь одна обращает в минимум рассматриваемую линейную форму. Эта точка является, очевидно, крайней точкой множества  $S$  (в гл. 3 этот факт будет установлен для общего случая).

Подобным же образом на множестве  $S$  можно найти оптимум (максимум или минимум) любой другой линейной формы. Для этого нужно нанести прямую, соответствующую некоторому частному значению линейной формы, и затем перемещать ее параллельно самой себе в соответствующем направлении до получения максимума или минимума. Передвигать прямую следует до тех пор, пока пересечение этой прямой с  $S$  либо





необходимости одновременно может быть получена обратная матрица  $A^{-1}$ .

Разберем этот метод на примере.

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов. Легко проверить, что она неособенная. Систему (5.2) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

или, полагая

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

в виде

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = P_0.$$

Так как  $A$  — неособенная матрица, то система векторов  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  линейно независима и, следовательно, образует базис в трехмерном пространстве\*). Для решения системы (5.2)

---

\*) Для доказательства линейной независимости системы векторов  $P_1, P_2, \dots, P_n$  неособенной матрицы предположим противное, т. е. что она линейно зависима. Тогда для некоторых величин  $\alpha_j$  должно быть справедливо равенство

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n = 0,$$

причем по крайней мере одна из величин  $\alpha_j$  отлична от нуля. Тогда некоторый вектор  $P_j$ , например  $P_1$ , может быть представлен

необходимо найти коэффициенты единственной линейной комбинации (т. е. числа  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ) векторов  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , совпадающей с вектором  $P_0$ . Займемся решением системы (5.2). Процесс решения состоит в последовательном исключении первой, второй, третьей и т. д. переменных из всех уравнений, кроме первого, второго, третьего и т. д. соответственно. Для системы (5.2) первый шаг состоит в исключении первого неизвестного ( $x_1$ ) из всех уравнений, кроме первого. Результат достигается сложением второго и третьего уравнений с первым, умноженным на соответствующие числа.

Шаг 1.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

Поскольку матрица  $A$  неособенная, систему (5.2) можно записать в таком виде, чтобы коэффициент при первом неизвестном в первом уравнении был отличен от нуля.

Этого можно добиться за счет соответствующей перенумерации уравнений (или неизвестных).

В рассматриваемом примере  $a_{11} = 1$ . Для исключения  $x_1$  из второго уравнения умножаем первое уравнение на 2 и складываем полученное уравнение со вторым. Для исключения первого неизвестного из третьего уравнения умножаем первое уравнение на  $-1$  и складываем его с третьим. Эти два преобразования переводят заданную систему в следующую:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 3x_2 - x_3 &= 7, \\ 2x_3 &= 4. \end{aligned} \right\}$$

в виде линейной комбинации остальных векторов:

$$P_1 = \beta_2 P_2 + \dots + \beta_n P_n$$

где  $\beta_j = -\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ . Подставим это выражение  $P_1$  в матрицу  $A$ . Затем последовательным прибавлением к первому столбцу  $-\beta_j P_j$  для  $j=2, 3, \dots, n$  приводим его к нулевому. Определитель матрицы, полученной с помощью указанного преобразования, равен нулю, так как один из его столбцов — нулевой. Следовательно, определитель исходной матрицы также равнялся нулю, что, однако, противоречит предположению о неособенности матрицы  $A$ . Итак, система  $P_1, \dots, P_n$  линейно независима.

Шаг 2. Исключаем теперь вторую переменную из всех уравнений, полученных в результате шага 1, кроме второго. Снова уравнения могут быть расположены таким образом, чтобы коэффициент при  $x_2$  во втором уравнении не был равен нулю. Так как в начале итерации удобно сделать коэффициент при исключаемой переменной равным 1, делим второе уравнение на 3. Коэффициент 3 является для нас направляющим элементом (в шаге 1 направляющий элемент  $a_{11}=1$ ). Умножая затем преобразованное второе уравнение на  $-1$  и складывая его с первым, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \frac{2}{3}x_3 &= -\frac{1}{3}, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= \frac{7}{3}, \\ 2x_3 &= 4. \end{aligned} \right\}$$

Шаг 3. Теперь направляющим элементом является 2. Поделив на 2 третье уравнение, полученное после шага 2, и умножив результат на  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{3}$ , сложим полученные уравнения с первым и вторым соответственно. Система (5.2) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 3, \\ x_3 &= 2, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

определяющему, очевидно, ее решение. Заметим, что вся совокупность проведенных операций преобразует матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в единичную матрицу (матрицу коэффициентов преобразованной системы уравнений (5.3))

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что совокупность преобразований, связанных с методом полного исключения, эквивалентна умножению системы (5.1) на  $A^{-1}$ .

Весьма часто нужно не только решить систему линейных уравнений, но получить также матрицу, обратную матрице коэффициентов. Это достигается за счет дописывания справа от первоначальной матрицы коэффициентов единичной матрицы порядка  $m$  и применения далее метода полного исключения к расширенной матрице. Обратная матрица получается на месте, занятом ранее единичной матрицей. Если записать расширенную матрицу

$$(A \mid I \mid P_0)$$

(составленную из матрицы  $A$ , единичной матрицы порядка  $m$  приписанной справа от нее, и вектора  $P_0$ , помещенного в конце) и применить метод полного исключения, то получим

$$(A^{-1}A \mid A^{-1}I \mid A^{-1}P_0).$$

Проиллюстрируем этот прием на предыдущем примере. Здесь расширенная матрица имеет такой вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Выполняя те же операции, что и ранее, получим

Шаг 1.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Шаг 2.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Шаг 3.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right).$$

Отсюда имеем:

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Единственной линейной комбинацией векторов  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , равной вектору  $P_0$ , является:

$$1P_1 + 3P_2 + 2P_3 = P_0.$$

Поскольку векторы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  образуют базис трехмерного пространства, любой другой вектор этого пространства может быть выражен в виде линейной комбинации этих векторов и при этом однозначно. Пусть для любого такого вектора, скажем  $P_4$ , необходимо определить  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  такие, что

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 = P_4,$$

или, что то же самое,

$$AY = P_4. \quad (5.4)$$

Для определения  $Y$  достаточно умножить (5.4) на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AY = A^{-1}P_4; \quad Y = A^{-1}P_4.$$

Пусть, например,

$$P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

тогда  $Y$  определяется как

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае  $P_4$  выражается следующей линейной комбинацией  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ :

$$2P_1 + 2P_2 + 0P_3 = P_4.$$

Здесь  $P_4$  является линейной комбинацией только двух векторов базиса. Трехмерные векторы  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  линейно зависимы, поскольку

$$2P_1 + 2P_2 - P_4 = 0.$$

Случай, когда вектор может быть выражен линейной комбинацией векторов, число которых меньше его размерности, будем называть *вырожденным*.

### З а м е ч а н и я

Большая часть материала § 1 заимствована из книги Гильдебранда [55a], основная часть материала § 2 — из книги Куна [67]: Для дополнительного чтения по теории выпуклых множеств рекомендуем ознакомиться с частью третьей сборника под редакцией Купманса [65] и работой Куна и Таккера [68].

### У п р а ж н е н и я

1. Изобразить графически область, в которой все приводимые ниже линейные неравенства удовлетворяются одновременно, и определить крайние точки этой области.

$$\left. \begin{aligned} 2x + 5y - 10 &\leq 0, \\ 2x + y - 6 &\leq 0, \\ x + 2y - 2 &\geq 0, \\ x + 3y - 3 &\leq 0. \end{aligned} \right\}$$

2. Записать систему неравенств из упражнения 1 в виде системы равенств с неотрицательными переменными.

3. Пусть дан базис, состоящий из векторов

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу, обратную матрице, составленной из векторов этого базиса, и определить разложение по базису вектора

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Выпуклая область, изображенная на рис. 12, является совокупностью решений системы линейных неравенств.

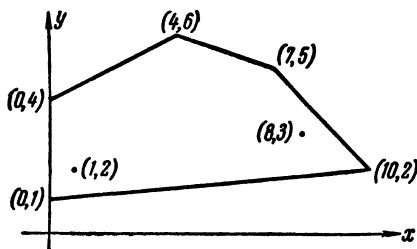


Рис. 12.

В какой точке или точках этой области следующие линейные формы достигают оптимума:

- а)  $x + y - 1$  — максимума;
- б)  $3x - y + 6$  — минимума;
- в)  $-2x - 2y + 2$  — максимума.

5. Дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \right\}$$

Допустим, что матрица коэффициентов  $(a_{ij})$  — неособенная. Решить эту систему методом полного исключения и вывести общие формулы, по которым осуществляются преобразования на каждом шаге.

6. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3, \end{aligned} \right\}$$

пользуясь формулами, полученными в упражнении 5. Найти также  $A^{-1}$  и проверить результат подсчетом  $AA^{-1}$ .

## И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АСПЕКТЫ)

Без ограничения общности можно считать все  $b_i$  неотрицательными, ибо в противном случае соответствующее уравнение можно умножить на  $-1$ . В различных ситуациях удобно использовать разные виды записи общей задачи линей-



ного программирования. Наиболее употребительными из них являются следующие:

1. Минимизировать  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  при условиях

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

2. Минимизировать  $cX$  при условии  $X \geq O$  и

$$AX = b,$$

где  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  — вектор-строка,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор-столбец,  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  — вектор-столбец и  $O$  —  $n$ -мерный нулевой вектор-столбец.

3. Минимизировать  $cX$  при условии

$$X \geq O$$

и

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0,$$

где  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) —  $j$ -й столбец матрицы  $A$  и  $P_0 = b$ .

## § 2. Свойства решений задачи линейного программирования

В этом параграфе формулируется несколько основных определений и устанавливаются наиболее важные характеристики решений общей задачи линейного программирования. Большая часть этого материала, так же как и материала гл. 4, содержится в работе Данцига [17] и книге Чарнеса, Купера и Гендерсона [12].

Определение 1. *Планом*\*) задачи линейного программирования называется вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющий условиям (1.2) и (1.3).

---

\*) При переводе термины *возможное решение*, *основное возможное решение* и *оптимальное возможное решение* заменены более естественными — *план*, *опорный план* и *решение (оптимальный план)*. (Прим. ред.)

Определение 2. План  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем называть *опорным*, если векторы  $P_i$ , входящие в разложение  $P_0 = \sum_{i=1}^n x_i P_i$  с положительными коэффициентами  $x_i$ , являются линейно независимыми\*). Непосредственно из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать  $m$ .

Определение 3. Опорный план назовем *невырожденным*, если он содержит ровно  $m$  положительных компонент.

Определение 4. *Оптимальным планом* или *решением* задачи линейного программирования называется план, минимизирующий (оптимизирующий) линейную форму (1.1).

Определение 5. Функция  $f(X)$ , определенная в  $n$ -мерном пространстве и принимающая действительные значения, называется *линейным функционалом*, если для любых векторов  $U, V$  из этого пространства и скаляров  $\alpha, \beta$

$$f(\alpha U + \beta V) = \alpha f(U) + \beta f(V).$$

Очевидно, что линейная форма (1.1) является линейным функционалом.

Теорема 1. *Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.*

Доказательство. Необходимо показать, что выпуклая комбинация любых двух планов задачи также является ее планом. (Теорема, разумеется, справедлива, если множество планов состоит из одного элемента). Допустим, что рассматриваемая задача обладает по крайней мере двумя планами:  $X_1$  и  $X_2$ . Тогда

$$AX_1 = b \quad \text{для} \quad X_1 \geq 0$$

и

$$AX_2 = b \quad \text{для} \quad X_2 \geq 0.$$

Пусть  $X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$  при  $0 \leq \alpha \leq 1$  — произвольная выпуклая комбинация  $X_1$  и  $X_2$ . Отметим, что все

---

\*) В оригинале здесь допущена неточность. Определение опорного плана не связывается с линейной независимостью векторов, соответствующих его положительным компонентам. (Прим. ред.)

компоненты вектора  $X$  неотрицательны, т. е.  $X \geq 0$ . Очевидно, что  $X$  является планом. В самом деле,

$$\begin{aligned} AX &= A [\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2] = \alpha AX_1 + (1 - \alpha) AX_2 = \\ &= \alpha b + b - \alpha b = b. \end{aligned}$$

Подобным же образом доказывается, что множества решений системы неравенств (4.4) и системы уравнений (5.1) из гл. 2 являются выпуклыми.

В дальнейшем мы будем обозначать выпуклое множество планов задачи линейного программирования через  $K$ . Так как  $K$  определяется конечной совокупностью линейных ограничений (1.2) и (1.3), его граница (если  $K$  не пусто) состоит из кусков нескольких гиперплоскостей.  $K$  может быть либо пустым множеством, либо выпуклым многогранником, либо выпуклой многогранной областью, уходящей в бесконечность.

Если  $K$  — выпуклый многогранник, задача обладает планами, причем оптимальное значение линейной формы конечно. Если же  $K$  — неограниченная многогранная область, то задача обладает планами, но минимум соответствующей линейной формы, вообще говоря, совпадает с  $-\infty$ . Так как практические задачи всегда обладают планами, соответствующие им модели линейного программирования порождают область  $K$  второго, а иногда третьего типа. В силу теоремы 1 задача, обладающая более чем одним планом, имеет в действительности бесчисленное множество планов. Нашей целью является выбор из множества всевозможных планов задачи такого плана, который доставляет минимум соответствующей линейной форме. Эту задачу можно несколько облегчить с помощью результатов нижеследующей теоремы 2. Прежде чем формулировать эту теорему, необходимо отметить следующее.

Любая точка выпуклого многогранника может быть представлена в виде некоторой выпуклой комбинации его крайних точек\*). Поэтому каждый план из  $K$  (область  $K$  предполагается ограниченной) представляется выпуклой комбинацией планов задачи, являющихся крайними точками  $K$  (по определению выпуклый многогранник имеет конечное число крайних точек). Неограниченная многогранная область  $K$ , порождаемая

---

\*) При принятом здесь определении выпуклого многогранника (ограниченного множества, являющегося пересечением конечного числа полупространств) отмеченное утверждение не очевидно. Доказательство этого утверждения нетривиально. (Прим. ред.)

задачей линейного программирования, также имеет конечное число крайних точек, однако не все точки  $K$  могут быть представлены их выпуклыми комбинациями. Для облегчения изложения будем предполагать, что область  $K$ , определяемая условиями задачи, ограничена, т. е. совпадает с некоторым многогранником.

В последующих главах будут рассмотрены вычислительные приемы, позволяющие в случае, если  $K$  пусто или линейная форма задачи на  $K$  не ограничена, установить это.

Предшествующие рассуждения наводят на мысль, что в случае, если  $K$  — выпуклый многогранник, отыскание оптимума линейной формы рассматриваемой задачи сводится к перебору его крайних точек. Это устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 2.** *Линейная форма задачи программирования (1.1) достигает своего минимума в крайней точке выпуклой области  $K$ , являющейся множеством планов этой задачи. Если линейная форма принимает минимальное значение более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.*

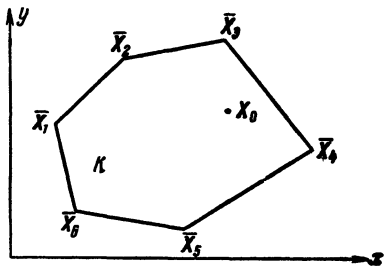


Рис. 13.

**Доказательство.** По предположению,  $K$  — выпуклый многогранник и, следовательно, имеет конечное число крайних точек. В двумерном пространстве  $K$  имеет вид, подобный изображенному на рис. 13.

Обозначим крайние точки  $K$  через  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p$ , а оптимальный план через  $X_0$ . Это значит, что  $f(X_0) \leq f(X)$  для всех  $X$  из  $K$ . Если  $X_0$  — крайняя точка, первую часть теоремы можно считать доказанной. Предположим, что  $X_0$  не является крайней точкой (как показано на рис. 13), тогда  $X_0$  можно представить в виде выпуклой комбинации крайних точек  $K$ , т. е.

$$X_0 = \sum_{i=1}^p a_i \bar{X}_i$$

для  $\alpha_i \geq 0$  и  $\sum_i \alpha_i = 1$ . Тогда, поскольку  $f(X)$  — линейный функционал, получаем:

$$\begin{aligned} f(X_0) &= f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{X}_i\right) = f(\alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2 + \dots + \alpha_p \bar{X}_p) = \\ &= \alpha_1 f(\bar{X}_1) + \alpha_2 f(\bar{X}_2) + \dots + \alpha_p f(\bar{X}_p) = m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $m$  — минимум  $f(X)$  для всех  $X$  из  $K$ .

Поскольку все  $\alpha_i \geq 0$ , мы не увеличим сумму (2.1), если вместо каждого  $f(\bar{X}_i)$  подставим минимальную из величин  $f(\bar{X}_i)$ . Пусть  $f(\bar{X}_m) = \min_i f(\bar{X}_i)$ . Отсюда, учитывая равенство  $\sum_i \alpha_i = 1$ , получаем

$$f(X_0) \geq \alpha_1 f(\bar{X}_m) + \alpha_2 f(\bar{X}_m) + \dots + \alpha_p f(\bar{X}_m) = f(\bar{X}_m).$$

Так как, по предположению,  $f(X_0) \leq f(X)$  для всех  $X$  из  $K$ , то

$$f(X_0) = f(\bar{X}_m) = m.$$

Итак, существует крайняя точка  $\bar{X}_m$ , в которой линейная форма задачи принимает минимальное значение.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что  $f(X)$  принимает минимальное значение более чем в одной крайней точке, например в  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_q$ . Тогда  $f(\bar{X}_1) = f(\bar{X}_2) = \dots = f(\bar{X}_q) = m$ . Если  $X$  является некоторой выпуклой комбинацией точек  $\bar{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , скажем

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i \bar{X}_i$$

при  $\alpha_i \geq 0$  и  $\sum_i \alpha_i = 1$ , то

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2 + \dots + \alpha_q \bar{X}_q) = \\ &= \alpha_1 f(\bar{X}_1) + \alpha_2 f(\bar{X}_2) + \dots + \alpha_q f(\bar{X}_q) = \sum_i \alpha_i m = m. \end{aligned}$$

Доказательство закончено. С помощью очевидных изменений доказательство теоремы переносится и на тот случай, когда линейную форму (1.1) необходимо максимизировать. Согласно теореме 2, поиски оптимального плана задачи линейного программирования можно ограничить перебором конечного числа крайних точек  $K$ .

Напомним, что планом задачи называется такой вектор с неотрицательными компонентами  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k = P_0.$$

Пусть мы нашли систему  $k$  линейно независимых векторов  $P_1, \dots, P_k$ , линейная комбинация которых с неотрицательными коэффициентами совпадает с  $P_0$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

*Теорема 3. Если известно, что система векторов  $P_1, P_2, \dots, P_k$  линейно независима и такова, что*

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k = P_0,$$

*где все  $x_i \geq 0$ , то точка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$  является крайней точкой выпуклого множества планов  $K$ .*

Здесь  $X$  —  $n$ -мерный вектор, последние  $n - k$  компонент которого равны нулю.

Доказательство. Предположим, что  $X$  не является крайней точкой. В таком случае, поскольку  $X$  — план, то этот вектор может быть записан в виде выпуклой комбинации двух других точек  $X_1, X_2$  из  $K$ . Получаем

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2,$$

где  $0 < \alpha < 1$ . Так как компоненты векторов  $X_1, X_2$  неотрицательны,  $0 < \alpha < 1$  и последние  $n - k$  компонент вектора  $X$  — нули, то соответствующие компоненты векторов  $X_1$  и  $X_2$  также равняются нулю, т. е.

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, 0, \dots, 0), \\ X_2 &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Поскольку  $X_1$  и  $X_2$  являются планами, получаем

$$\begin{aligned} AX_1 &= b, \\ AX_2 &= b. \end{aligned}$$

Переписав эти уравнения в векторной форме, имеем

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}P_1 + x_2^{(1)}P_2 + \dots + x_k^{(1)}P_k &= P_0, \\ x_1^{(2)}P_1 + x_2^{(2)}P_2 + \dots + x_k^{(2)}P_k &= P_0. \end{aligned}$$

Но векторы  $P_1, P_2, \dots, P_k$  линейно независимы, и, следовательно,  $P_0$  выражается через них единственным образом\*). Поэтому  $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ . Итак,  $X$  невозможно представить в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек области  $K$ . Следовательно,  $X$  — крайняя точка  $K$ .

**Теорема 4.** Если  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — крайняя точка  $K$ , то векторы, соответствующие положительным  $x_i$ , образуют линейно независимую систему.

Отсюда, в частности, следует, что крайняя точка имеет не более чем  $t$  положительных компонент  $x_i$ .

**Доказательство.** Пусть не равными нулю являются первые  $k$  компонент вектора  $X$ , так что  $\sum_{i=1}^k x_i P_i = P_0$ . Докажем основную часть теоремы методом от противного.

Допустим, что система  $P_1, P_2, \dots, P_k$  линейно зависима. Тогда существует линейная комбинация ее векторов, равная нулевому вектору

$$d_1 P_1 + d_2 P_2 + \dots + d_k P_k = O, \quad (2.2)$$

где по крайней мере один из коэффициентов  $d_i \neq 0$ . По условию теоремы

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k = P_0. \quad (2.3)$$

---

\*) Это можно показать следующим образом. Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_k$  — система линейно независимых векторов. Допустим, что вектор  $P_0$  можно представить через эти векторы в виде двух линейных комбинаций:

$$e_1 P_1 + e_2 P_2 + \dots + e_k P_k = P_0$$

и

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots + f_k P_k = P_0.$$

Чтобы показать, что эти комбинации идентичны, вычтем вторую из первой:

$$(e_1 - f_1) P_1 + (e_2 - f_2) P_2 + \dots + (e_k - f_k) P_k = O.$$

По определению линейной независимости  $(e_i - f_i) = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ , откуда  $e_i = f_i$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Зададимся некоторым  $d > 0$  и умножим на него обе части равенства (2.2). Прибавляя и вычитая полученный результат из (2.3), имеем

$$\sum_{i=1}^k x_i P_i + d \sum_{i=1}^k d_i P_i = P_0,$$

$$\sum_{i=1}^k x_i P_i - d \sum_{i=1}^k d_i P_i = P_0.$$

Таким образом, система уравнений (2.3) имеет два решения:

$$X_1 = (x_1 + dd_1, x_2 + dd_2, \dots, x_k + dd_k, 0, \dots, 0)$$

и

$$X_2 = (x_1 - dd_1, x_2 - dd_2, \dots, x_k - dd_k, 0, \dots, 0)$$

(заметим, что они могут и не быть планами). Поскольку все  $x_i > 0$ ,  $d$  можно выбрать настолько малым, чтобы первые  $k$  компонент  $X_1$  и  $X_2$  приняли положительные значения. Тогда  $X_1$  и  $X_2$  станут планами. Но

$$X = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2,$$

что противоречит предположению о том, что  $X$  — крайняя точка.

Итак, допущение о линейной зависимости векторов  $P_1, P_2, \dots, P_k$  привело нас к противоречию и, следовательно, должно быть отвергнуто. Значит, система векторов  $P_1, P_2, \dots, P_k$  линейно независима.

Поскольку каждая система из  $m + 1$  векторов в  $m$ -мерном пространстве обязательно линейно зависима, среди компонент крайней точки  $K$  не может быть более чем  $m$  положительных.

В самом деле, предположение противного привело бы нас согласно только что доказанной теореме к существованию в  $m$ -мерном пространстве системы, состоящей из  $m + 1$  линейно независимых векторов.

Не теряя общности, можно предположить, что система векторов задачи линейного программирования  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  всегда содержит  $m$  линейно независимых векторов. Если при решении частной задачи это свойство не очевидно, то первоначальная система векторов дополняется  $m$  линейно



независимыми векторами, после чего отыскивается решение расширенной задачи. Этот способ будет детально рассмотрен в последующих главах.

**Следствие 1.** *Каждой крайней точке из  $K$  соответствует  $m$  линейно независимых векторов из данной системы  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .*

**Доказательство.** Теорема 4 утверждает, что имеется  $k \leq m$  таких векторов. При  $k = m$  следствие доказано. Пусть  $k < m$  и существует не более  $r - k$  таких векторов  $P_{k+1}, \dots, P_r$ , что

$$P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_r$$

— линейно независимая система. Если  $r < m$ , то остальные  $n - r$  векторов зависят от  $P_1, \dots, P_r$ . Но это противоречит предположению о существовании  $m$  линейно независимых векторов в данной системе  $P_1, \dots, P_n$ . Поэтому  $r = m$ .

Итак, каждой крайней точке  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  соответствует  $m$  линейно независимых векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$  таких, что

$$\sum_{i=1}^k x_i P_i + \sum_{i=k+1}^m 0 P_i = P_0.$$

Доказанные теоремы могут быть объединены в следующем утверждении:

**Теорема 5.**  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  является крайней точкой  $K$  в том и только в том случае, если положительные компоненты  $x_j$  являются коэффициентами при линейно независимых векторах  $P_j$  в разложении

$$\sum_{j=1}^n x_j P_j = P_0.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что совокупность опорных планов задачи линейного программирования совпадает с системой крайних точек множества  $K$ , порожденного условиями данной задачи.

Из результатов настоящего параграфа следует, что

- 1) существует такая крайняя точка  $K$ , в которой линейная форма задачи достигает своего оптимума (минимума);
- 2) каждый опорный план соответствует крайней точке  $K$ ;

3) с каждой крайней точкой  $K$  связаны  $m$  линейно независимых векторов из данной системы  $n$  векторов.

Из этого можно заключить, что необходимо исследовать лишь крайние точки  $K$ , т. е. только опорные планы, каждый из которых определяется системой  $m$  линейно независимых векторов. Поскольку в данной системе  $n$  векторов содержится не больше чем  $C_n^m$  систем, каждая из которых состоит из  $m$  линейно независимых векторов, величина  $C_n^m$  является верхней границей числа опорных планов задачи \*).

При больших  $m$  и  $n$  было бы непосильно отыскивать оптимальный план путем перебора всех опорных планов. Поэтому необходимо иметь вычислительную схему, позволяющую осуществить упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является *симплексный метод*, предложенный Дж. Б. Данцигом \*\*). С помощью этого метода можно отыскать крайнюю точку и определить, является ли она оптимальной. Если это не так, метод позволяет найти такую соседнюю точку, в которой линейная форма принимает значение, меньшее или равное предыдущему. Через конечное число шагов (обычно между  $m$  и  $2m$ ) достигается минимум линейной формы.

Если задача не обладает планами или если ее линейная форма не ограничена на множестве планов  $K$ , то симплексный метод позволяет установить это за конечное число шагов. С помощью симплексного метода можно решать любые задачи линейного программирования. Прежде чем перейти к обоснованию и вычислительным схемам симплексного метода, рассмотрим отдельные его элементы.

### § 3. Построение опорных планов

Предположим, что известен опорный план, соответствующий  $m$  векторам  $P_j$  из первоначальной системы  $n$  векторов. Без ограничения общности можно считать, что этими векторами

---

\*) Смотри работу Саати [88], в которой оценивается сверху число опорных планов задачи.

\*\*) Название симплексного метода произошло из-за того, что среди линейных ограничений задачи, рассмотренной Данцигом [17], есть уравнение  $\sum_i x_i = 1$

являются первые  $m$  векторов системы  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Опорный план имеет вид

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Тогда

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m = P_0, \quad (3.1)$$

где все  $x_i \geq 0$ . Попробуем теперь, исходя из известного опорного плана, определить новый опорный план (мы, разумеется, предполагаем существование более чем одного опорного плана).

Поскольку векторы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейно независимы, они образуют базис в  $m$ -мерном векторном пространстве. Мы можем поэтому каждый из данных  $n$  векторов выразить в виде линейной комбинации векторов базиса. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} P_i = P_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в наш базис, скажем  $P_{m+1}$ , хотя бы один из коэффициентов  $x_{i,m+1}$  в выражении

$$x_{1,m+1} P_1 + x_{2,m+1} P_2 + \dots + x_{m,m+1} P_m = P_{m+1} \quad (3.2)$$

положителен. Задавшись некоторой величиной  $\theta$ , умножим на нее обе части равенства (3.2) и вычтем результат из (3.1). Получаем:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1}) P_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1}) P_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m,m+1}) P_m + \theta P_{m+1} = P_0. \quad (3.3)$$

Вектор

$$X' = (x_1 - \theta x_{1,m+1}, x_2 - \theta x_{2,m+1}, \dots, x_m - \theta x_{m,m+1}, \theta)^*$$

в случае неотрицательности своих компонент является планом. Так как отыскивается план  $X'$ , отличный от  $X$ , рассматриваются лишь положительные значения  $\theta$ . При этом ограничении все компоненты  $X'$ , в которые входят неполо-

---

\*) Здесь и в дальнейшем автор при записи векторов опускает их нулевые компоненты. Например, вместо  $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  часто встречается запись  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . (Прим. ред.)

жительные  $x_{i,m+1}$ , будут также неотрицательными. Необходимо поэтому рассмотреть лишь компоненты, включающие положительные  $x_{i,m+1}$ . Мы хотим определить такое  $\theta > 0$ , что

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0 \quad (3.4)$$

для всех

$$x_{i,m+1} > 0.$$

Из (3.4) имеем

$$\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \geq \theta,$$

и, следовательно, любое  $\theta$ , для которого

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

где минимум берется по тем  $i$ , для которых  $x_{i,m+1} > 0$ , определяет в соответствии с (3.3) некоторый план нашей задачи.

Однако, как мы видели в § 2, опорный план не может содержать  $m+1$  положительных компонент. Поэтому следует обратить в нуль по крайней мере одну из компонент  $X'$ . Очевидно, если положить

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$$

для всех  $x_{i,m+1} > 0$ , то компонента  $X'$ , для которой достигается минимум, обращается в нуль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т. е.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Мы тогда получаем новый план

$$x'_2 P_2 + x'_3 P_3 + \dots + x'_m P_m + x'_{m+1} P_{m+1} = P_0,$$

где

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \theta_0 x_{i,m+1}, & i &= 2, \dots, m, \\ x'_{m+1} &= \theta_0. \end{aligned}$$

Если все  $x_{i,m+1}$  равны нулю или меньше его, то мы не в состоянии выбрать положительное  $\theta$ , которое исключало бы по крайней мере один из векторов  $P_1, \dots, P_m$  из базиса.

В этом случае при любом  $\theta > 0$  мы не получим опорного плана. Как будет показано в гл. 4, в этом случае задача не имеет конечного минимального решения (оптимального плана).

Для того чтобы показать, что  $X' = (x'_2, \dots, x'_m, x'_{m+1})$  — крайняя точка, достаточно доказать, что система векторов  $P_2, \dots, P_m, P_{m+1}$  линейно независима. Допустим, что они линейно зависимы, тогда можно найти (согласно определению линейной зависимости) числа  $d_i$  такие, что

$$d_2 P_2 + d_3 P_3 + \dots + d_m P_m + d_{m+1} P_{m+1} = 0, \quad (3.5)$$

причем не все  $d_i = 0$ . Поскольку любая подсистема системы линейно независимых векторов также линейно независима, векторы  $P_2, \dots, P_m$  линейно независимы. Отсюда следует, что  $d_{m+1} \neq 0$ . Из (3.5) имеем

$$e_2 P_2 + e_3 P_3 + \dots + e_m P_m = P_{m+1}, \quad (3.6)$$

где

$$e_i = \frac{-d_i}{d_{m+1}}.$$

Вычитая (3.6) из (3.2), получаем

$$x_{1, m+1} P_1 + (x_{2, m+1} - e_2) P_2 + (x_{3, m+1} - e_3) P_3 + \dots + (x_{m, m+1} - e_m) P_m = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейно независимы, все коэффициенты из (3.7) должны быть равны нулю. Но по предположению  $x_{1, m+1}$  положительно. Следовательно, допущение линейной зависимости  $P_2, \dots, P_{m+1}$  ведет к противоречию, т. е. эти векторы должны быть линейно независимы.

Для продолжения процесса получения новых опорных планов необходимо представить любой вектор, не входящий в новый базис  $P_2, P_3, \dots, P_{m+1}$ , в виде линейной комбинации векторов этого базиса. Из (3.2) получаем

$$P_1 = \frac{1}{x_{1, m+1}} (P_{m+1} - x_{2, m+1} P_2 - \dots - x_{m, m+1} P_m). \quad (3.8)$$

Пусть

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \dots + x_{mj} P_m \quad (3.9)$$

— некоторый вектор, не входящий в новый базис. Подставив

тогда выражение (3.8) для  $P_1$  в (3.9), получаем

$$P_j = \left( x_{2j} - \frac{x_{1j}}{x_{1, m+1}} x_{2, m+1} \right) P_2 + \left( x_{3j} - \frac{x_{1j}}{x_{1, m+1}} x_{3, m+1} \right) P_3 + \\ + \dots + \left( x_{mj} - \frac{x_{1j}}{x_{1, m+1}} x_{m, m+1} \right) P_m + \frac{x_{1j}}{x_{1, m+1}} P_{m+1}.$$

Как читатель может заметить, формулы полного исключения, которые следовало получить в упражнении 5 гл. 2, эквивалентны преобразованию, представляющему  $P_0$  и  $P_j$  в виде линейных комбинаций векторов нового базиса. Процесс получения новых опорных планов, таким образом, заключается в выборе нового вектора, который следует ввести в базис известного опорного плана, и переменной, подлежащей исключению из этого базиса. При этом необходимо обеспечить соответствие получаемого базиса некоторому плану задачи. Новый план и разложение векторов, не входящих в его базис, по векторам этого базиса получаются при помощи формул полного исключения. Критерий, используемый для определения вектора, который следует ввести в базис, является основным элементом симплексного метода и будет рассмотрен в гл. 4.

Пример. Зададимся следующей системой уравнений

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_0$
$3x_1$	$-x_2$	$+2x_3$	$+x_4$			$= 7$
$2x_1$	$-4x_2$			$+x_5$		$= 12$
$-4x_1$	$-3x_2$	$+8x_3$			$+x_6$	$= 10.$

В качестве исходного опорного плана принимаем

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 7, x_5 = 12, x_6 = 10.$$

Отсюда получаем векторное равенство

$$7P_4 + 12P_5 + 10P_6 = P_0. \quad (3.10)$$

Здесь векторы базиса  $P_4$ ,  $P_5$  и  $P_6$  являются единичными векторами. Мы хотим ввести вектор  $P_1$  для получения другого опорного плана. Разложим  $P_1$  по векторам базиса

$$3P_4 + 2P_5 - 4P_6 = P_1, \quad (3.11)$$

откуда  $x_{41} = 3$ ,  $x_{51} = 2$ ,  $x_{61} = -4$ .

Умножая (3.11) на  $\theta$  и вычитая полученный результат из (3.10), получим

$$(7 - 3\theta)P_4 + (12 - 2\theta)P_5 + (10 + 4\theta)P_6 + \theta P_1 = P_0. \quad (3.12)$$

Поскольку  $x_{41} = 3$  и  $x_{51} = 2$  оба положительны, то

$$\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{i1}} = \min \left( \frac{7}{3}, \frac{12}{2} \right) = \frac{7}{3}.$$

Подставляя полученное значение  $\theta$  в (3.12), исключаем  $P_4$  из базиса:

$$\frac{22}{3}P_5 + \frac{58}{3}P_6 + \frac{7}{3}P_1 = P_0.$$

Таким образом, компоненты нового опорного плана суть

$$x_1 = \frac{7}{3}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = \frac{22}{3}; \quad x_6 = \frac{58}{3}.$$

Если провести те же самые преобразования, заменив вектор  $P_1$  на вектор  $P_2$ , где

$$-P_4 - 4P_5 - 3P_6 = P_2,$$

то получим разложение для  $P_0$  по векторам  $P_4, P_5, P_6, P_2$ :

$$(7 + \theta)P_4 + (12 + 4\theta)P_5 + (10 + 3\theta)P_6 + \theta P_2 = P_0. \quad (3.13)$$

Из (3.13) очевидно, что при любом  $\theta > 0$  получается план

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \theta; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 7 + \theta; \quad x_5 = 12 + 4\theta; \\ x_6 = 10 + 3\theta.$$

Поскольку все  $x_{i2} < 0$ , мы здесь не сможем получить новый опорный план.

Процесс отыскания последовательности опорных планов задачи представляет собой некоторое преобразование метода полного исключения. Здесь мы составляем таблицу из коэффициентов разложения векторов  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  по базису  $P_4, P_5, P_6$ :

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$\theta$
3	-1	2	1	0	0	7	$\frac{7}{3} = \theta_0$
2	-4	0	0	1	0	12	
-4	-3	8	0	0	1	10	

Так как мы хотим ввести  $P_1$  в базис, составляем снова отношения  $\frac{x_i}{x_{i1}}$  для  $x_{i1} > 0$ . Поскольку  $\theta_0 = \frac{7}{3}$  совпадает с минимумом этих отношений, примем первую компоненту вектора  $P_1$ , равную 3, за направляющий элемент в преобразовании по методу полного исключения и выделим её жирным шрифтом. Исключим теперь  $x_1$  из всех уравнений, кроме первого. Проведя соответствующие преобразования, получим таблицу

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_0$	$\theta$
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{7}{3}$	
0	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{22}{3}$	
0	$-\frac{13}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{58}{3}$	

Здесь  $x_1 = \frac{7}{3}$ ,  $x_5 = \frac{22}{3}$ ,  $x_6 = \frac{58}{3}$  и  $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ . Получаем, таким образом, базис  $P_1$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ , а  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  явно выражаются через его векторы в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}P_1 - \frac{10}{3}P_5 - \frac{13}{3}P_6 &= P_2, \\ \frac{2}{3}P_1 - \frac{4}{3}P_5 + \frac{32}{3}P_6 &= P_3, \\ \frac{1}{3}P_1 - \frac{2}{3}P_5 + \frac{4}{3}P_6 &= P_4. \end{aligned}$$

Если теперь необходимо получить опорный план с вектором  $P_3$  в базисе, то следует начать со второй таблицы, определить аналогичным образом  $\theta_0$  и преобразовать эту таблицу по формулам метода исключения. Полученная таблица будет содержать коэффициенты разложений векторов, не входящих в новый базис, по векторам этого базиса.

### У п р а ж н е н и я

1. Выписанная ниже система уравнений имеет заданный опорный план  $X = (x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 6)$ . С помощью преобразований, описанных в § 3, получить два других опорных плана с базисами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  и  $P_3$ ,  $P_5$ ,  $P_4$ . В каждом случае определить разложение  $P_6$  и



исключаемого вектора по векторам нового базиса

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_0$
$x_1$			$+ 2x_4$	$- x_5$	$= 4$
	$x_2$		$- x_4$	$+ x_5$	$= 3$
		$x_3$	$+ 3x_4$	$- 2x_5$	$= 6$

2. Выполнить упражнение 1 с помощью составления таблицы и применения общих формул, выведенных для метода полного исключения в упражнении 5 гл. 2. Для обоих базисов переменное  $x_4$  следует исключить из всех уравнений, кроме первого.

3. Для квадратной матрицы третьего порядка, составленной из векторов  $P_1, P_2, P_4$  упражнения 2, вычислить обратную матрицу с помощью присоединенной, как было описано в гл. 2. Прodelать то же самое для матрицы, составленной из векторов  $P_2, P_3, P_4$ .

---

## Г Л А В А 4

### СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД \*)

Теперь мы перейдем к рассмотрению и обоснованию основных элементов симплексного метода и связанных с ним вычислительных алгоритмов. Симплексный метод позволяет, отправляясь от известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее решение (оптимальный план). Каждый из этих шагов, или итераций, состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной формы, чем значение этой же формы при предшествующем плане. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. Как было показано в гл. 3, каждый опорный план, и в частности оптимальный, связан с системой  $m$  линейно независимых векторов. Поэтому естественно ограничить наши поиски теми планами, которые связаны с системами  $m$  линейно независимых векторов (базисами плана), т. е. опорными планами, число которых конечно.

#### § 1. Отыскание оптимального плана

Предположим, что задача линейного программирования обладает планами и каждый ее опорный план невырожден. Допустим также, что нам известен один из опорных планов задачи \*\*). В дальнейшем будет показано, что принятые допущения нисколько не ограничивают общность рассуждений.

---

\*) В отечественной литературе описываемый в гл. 4 метод называется методом последовательного улучшения плана. Как видно из описания, этот термин вполне соответствует существу метода. (*Прим. ред.*)

\*\*) Определения этих терминов даны в § 2 гл. 3.

Пусть известен опорный план  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  и связанная с ним система линейно независимых векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Имеем тогда

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m = P_0 \quad (1.1)$$

и

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_m c_m = z_0, \quad (1.2)$$

где все  $x_i > 0$ ,  $c_i$  — коэффициенты линейной формы и  $z_0$  — ее значение, соответствующее данному плану. Поскольку векторы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейно независимы, любой вектор системы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  можно разложить по этим векторам единственным образом. Допустим, что  $P_j$  представляется в виде

$$x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \dots + x_{mj} P_m = P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

и

$$x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \dots + x_{mj} c_m = z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

где  $c_i$  — коэффициент линейной формы задачи, соответствующий вектору  $P_i$ .

**Теорема 1.** Если для некоторого фиксированного  $j$  соблюдается условие  $z_j - c_j > 0$ , то можно построить такое множество планов задачи, что для любого из них справедливо неравенство  $z < z_0$ , где  $z$  — значение линейной формы, соответствующее этому плану.

**Случай 1.** Если нижняя граница чисел  $z$  конечна, можно построить новый опорный план, связанный с меньшим значением линейной формы по сравнению с предыдущим.

**Случай 2.** Если нижняя граница  $z$  бесконечна, может быть найден новый план, состоящий в точности из  $m+1$  положительных компонент и соответствующий сколь угодно малому значению линейной формы задачи.

Доказательство в обоих случаях опирается на следующие замечания:

Умножив (1.3) и (1.4) на некоторое число  $\theta$  и вычтя результаты из (1.1) и (1.2) соответственно, получаем

$$(x_1 - \theta x_{1j}) P_1 + (x_2 - \theta x_{2j}) P_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj}) P_m + \theta P_j = P_0, \quad (1.5)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j}) c_1 + (x_2 - \theta x_{2j}) c_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj}) c_m + \theta c_j = z_0 - \theta (z_j - c_j). \quad (1.6)$$

В соотношении (1.6), кроме того, к обеим частям прибавлена величина  $\theta c_j$  для  $j=1, 2, \dots, n$ . Если все коэффициенты при векторах  $P_1, P_2, \dots, P_m, P_j$  (в 1.5) неотрицательны, получаем новый план, которому, согласно (1.6), соответствует значение линейной формы  $z = z_0 - \theta(z_j - c_j)$ . Поскольку переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  в (1.5) положительны, существует  $\theta > 0$ , для которого коэффициенты при векторах в (1.5) остаются положительными. Из допущения, что  $z_j - c_j > 0$  при фиксированном  $j$ , получаем

$$z = z_0 - \theta(z_j - c_j) < z_0 \quad (\theta > 0).$$

Мы видим, таким образом, что в обоих случаях можно получить новый план, связанный с уменьшенным значением линейной формы.

Доказательство в случае 1 проводится следующим образом:

Если для фиксированного  $j$  по крайней мере один из  $x_{ij}$  положителен ( $i=1, 2, \dots, m$ ) (см. (1.3)), наибольшая величина  $\theta$ , для которой все коэффициенты (1.5) остаются неотрицательными, определяется соотношением

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}, \quad (1.7)$$

где минимум берется по всем  $x_{ij} > 0$  (см. § 3 гл. 3). Поскольку мы предположили рассматриваемую задачу невырожденной, т. е. что все ее опорные планы содержат  $m$  положительных компонент, минимум в (1.7) будет достигаться при единственном  $i$ . Если подставить  $\theta_0$  вместо  $\theta$  в (1.5) и (1.6), то коэффициент, соответствующий этому единственному  $i$ , обратится в нуль. Таким образом, получен новый опорный план, базис которого состоит из  $P_j$  и  $(m-1)$ -го вектора первоначального базиса. С новым базисом могут проводиться те же операции, что и с предыдущими. Если снова одна из разностей  $z_j - c_j > 0$  и соответствующее  $x_{ij} > 0$ , можно перейти к другому опорному плану, связанному с еще меньшим значением линейной формы. Процесс продолжается до тех пор, пока либо все разности  $z_j - c_j$  станут неположительными, либо для некоторой разности  $z_j - c_j$  окажутся неположительными все  $x_{ij}$ . Если все  $z_j - c_j \leq 0$ , процесс закончен.

Доказательство в случае 2 проводится так:

Если на некотором шаге для какого-либо  $j$  разность  $z_j - c_j > 0$  и все  $x_{ij} \leq 0$ , то  $\theta$  не имеет верхней границы и линейная форма может быть сделана сколь угодно малой. В этом случае очевидно, что для любого  $\theta > 0$  все коэффициенты (1.5) положительны.

Таким образом, мы получаем план, состоящий из  $m + 1$  положительных компонент. Если выбрать  $\theta$  достаточно большим, соответствующее значение линейной формы, заданной правой частью (1.6), может быть сделано сколь угодно малым.

**Теорема 2.** Если для некоторого опорного плана  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^*$  справедливы неравенства  $z_j - c_j \leq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то план  $X$  является оптимальным\*\*).

**Доказательство.** Пусть  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — произвольный план,

$$y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_n P_n = P_0, \quad (1.8)$$

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + \dots + y_n c_n = z^*, \quad (1.9)$$

где  $z^*$ , как следует из (1.9), — значение линейной формы, соответствующее плану  $Y$ . Покажем, что  $z_0 \leq z^*$  (отметим, что для доказательства этой теоремы не требуется предположения о невырожденности).

По предположению,  $z_j - c_j \leq 0$  для всех  $j$  и, следовательно, при замене  $c_j$  на  $z_j$  получаем:

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n \leq z^*. \quad (1.10)$$

\*) См. замечание редактора на стр. 66.

\*\*) Этот критерий оптимальности иногда применяется в несколько измененной форме. Для задач минимизации можно вместо  $z_j - c_j$  подсчитывать числа  $c_j - z_j$  и в качестве вектора, вводимого в базис, выбирать тот, который соответствует  $\min(c_j - z_j)$ . Оптимум будет достигнут тогда, когда все  $c_j - z_j$  окажутся неотрицательными. Если первоначальная задача связана с максимизацией, то вместо сведения к задаче минимизации можно использовать следующий критерий: подсчитываются разности  $z_j - c_j$  и выбирается новый вектор, соответствующий  $\min(z_j - c_j)$ ; оптимальный план в этом случае будет достигнут, когда все  $z_j - c_j \geq 0$ . Гораздо более целесообразно, однако, особенно в связи с применением вычислительного метода для электронных вычислительных машин, выбрать какой-то один критерий для использования при решении всех задач. Формулировку критерия, применяющегося для выбора вектора, вводимого в базис, см. на стр. 82.

Подставив соответствующее каждому  $j$  выражение для  $P_j$  по формуле (1.3) в (1.8), имеем:

$$y_1 \left( \sum_{i=1}^m x_{i1} P_i \right) + y_2 \left( \sum_{i=1}^m x_{i2} P_i \right) + \dots + y_n \left( \sum_{i=1}^m x_{in} P_i \right) = P_0$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\left( \sum_{j=1}^n y_j x_{1j} \right) P_1 + \left( \sum_{j=1}^n y_j x_{2j} \right) P_2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^n y_j x_{mj} \right) P_m = P_0. \quad (1.11)$$

Аналогично, подставляя для каждого  $j$  выражение  $z_j$  из формулы (1.4) в неравенство (1.10), получаем:

$$\left( \sum_{j=1}^n y_j x_{1j} \right) c_1 + \left( \sum_{j=1}^n y_j x_{2j} \right) c_2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^n y_j x_{mj} \right) c_m \leq z^*. \quad (1.12)$$

Поскольку система векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейно независима, коэффициенты при соответствующих векторах в (1.1) и (1.11) должны быть равны \*). Поэтому из формулы (1.12) следует:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_m c_m \leq z^*$$

или, согласно (1.2),  $z_0 \leq z^*$ .

Теоремы 1 и 2 дают возможность, начав с исходного опорного плана задачи, получить последовательность новых ее опорных планов, завершающуюся оптимальным планом, или определить, что оптимального плана не существует.

Допущение о невырожденности обеспечивает возможность достижения оптимального плана за конечное число шагов. Если этого предположения не сделать, может оказаться, что среди  $m$  компонент  $x_i$  одна или несколько равны нулю. В этом случае  $\theta_0$  может оказаться равным нулю и значение линейной формы при переходе к новому опорному плану не

---

\*) Доказательство равенства коэффициентов (1.1) и (1.11) смотри в примечании к теореме 3 гл. 3.

изменится. Линейная форма может сохранить свое значение в течение нескольких последующих шагов. Тогда через несколько шагов возможен возврат к старому базису. В этом случае в симплексной процедуре получается цикл. В процессе вычислений явление вырожденности проявляется в том, что опорный план связан с меньшим, чем  $m$ , числом положительных компонент  $x_i$  и (или)  $\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}$  для  $x_{ij} > 0$  соответствует более чем одному  $i$ . Если такое  $i$  не единственно, некоторые из  $x_i$  в новом плане будут равны нулю.

Данциг, Орден и Вольф [32] и Чарнес, Купер и Гендерсон [12] рассмотрели явление вырожденности с теоретической и вычислительной точек зрения. Опыт вычислений, однако, не оправдывает включения их способа *устранения вырожденности* в обычный симплексный алгоритм. Из множества задач линейного программирования, рассмотренных исследователями на практике, цикл был обнаружен лишь в трех. Примеры циклов были построены Гофманом [58] и Билом [4]. Обычно при вычислениях с вырожденным планом обходятся так же, как и с невырожденным. Если

$$\theta_0 = \min_{x_{ij} > 0} \left( \frac{x_i}{x_{ij}} \right)$$

достигается на нескольких индексах  $i$ , обычным правилом является выбор наименьшего из этих индексов. Так определяется вектор, подлежащий исключению из базиса. Этот способ применяется в большинстве вычислительных и исследовательских центров.

В гл. 7 мы подробно остановимся на явлении вырожденности и рассмотрим пример цикла, построенный Билом.

## § 2. Алгоритм симплексного метода

В этом параграфе мы будем предполагать, что либо 1) выбрано  $m$  линейно независимых векторов, являющихся базисом некоторого опорного плана, по которым разложены все другие векторы, либо 2) матрица нашей задачи содержит  $m$  векторов, из которых может быть составлена единичная матрица порядка  $m$ .

Пусть для первого случая  $m$  линейно независимыми векторами будут  $P_1, P_2, \dots, P_m$ ; обозначим матрицу  $(P_1 P_2 \dots P_m)$  порядка  $m$  через  $B$ . Для определения плана  $X$ , связанного с базисом  $B$ , и разложения других векторов по векторам этого базиса необходимо, во-первых, вычислить  $B^{-1}$ . Поскольку

$$BX = P_0,$$

получаем

$$X = B^{-1}P_0$$

и

$$X_j = B^{-1}P_j,$$

где

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i \geq 0,$$

и

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$$

— векторы-столбцы.

Начиная симплексный процесс, сгруппируем векторы матрицы задачи следующим образом:

$$(P_0 | P_1 P_2 \dots P_m | P_{m+1} \dots P_n)$$

или

$$(P_0 | B | P_{m+1} \dots P_n). \quad (2.1)$$

Умножив элементы разбитой на части матрицы (2.1) на  $B^{-1}$ , получим

$$(X | I_m | X_{m+1} \dots X_n).$$

Подсчитываем  $z_j - c_j$  и проверяем, не будет ли для некоторого  $j$  соответствующее  $z_j - c_j > 0$ . Если это так, продолжаем процесс вычислений, как описано в теореме 1. В противном случае нами найден оптимальный план.

Вообще, поскольку мы не можем утверждать, что произвольная система  $m$  векторов из заданного множества  $P_1, P_2, \dots, P_n$  будет линейно независимой, и тем более образовывать базис некоторого плана, отыскание матрицы  $B^{-1}$ , о которой идет речь в первом случае, довольно затруднительно. Необходимо, следовательно, обладать методами, позволяющими выбирать исходный базис. Некоторые из этих методов описаны в § 1 гл. 10. Отметим, что в большинстве практи-



ческих задач имеет место случай 2. Поэтому он будет рассмотрен более подробно.

В этом случае предполагается, что данная система из  $n$  векторов  $P_1, \dots, P_n$  содержит  $m$  единичных векторов, которые можно сгруппировать в виде единичной матрицы порядка  $m$  (табл. 1).

Предположим, что этими векторами будут  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Тогда матрица

$$B = (P_1 P_2 \dots P_m) = I_m$$

является базисом. Поскольку  $B^{-1} = I_m$ , получаем исходный опорный план, равный

$$X = P_0$$

и

$$X_j = P_j,$$

где

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i \geq 0,$$

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}).$$

Для начала симплексного процесса расположим матрицу задачи, как показано в таблице 1 (на практике единичные векторы обычно не группируются вместе; мы делаем это в целях наглядности).

В рассматриваемой задаче, записываемой в виде  $AX = b$ , положим  $x_i = b_i$  и  $x_{ij} = a_{ij}$ .

$z_j$  для  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  равно скалярному произведению  $j$ -го вектора на вектор-столбец, обозначенный через  $c$ , т. е.

$$z_0 = \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Элементы  $z_0$  и  $z_j - c_j$  помещаются на соответствующие места  $(m+1)$ -й строки таблицы 1. Разности  $z_j - c_j$  для векторов базиса всегда равны нулю. Если все разности  $z_j - c_j \leq 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ , то план  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  является оптимальным и минимальное значение линейной формы равно  $z_0$ .

Таблица 1. Первая итерация вычислительного процесса

$i$	Базис	$c$	$P_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_l$	...	$c_{m+1}$	...	$c_j$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$P_1$	$P_2$	...	$P_l$	...	$P_{m+1}$	...	$P_j$	...	$P_k$	...	$P_n$
1	$P_1$	$c_1$	$x_1$	1	0	...	0	...	$x_{1,m+1}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1k}$	...	$x_{1n}$
2	$P_2$	$c_2$	$x_2$	0	1	...	0	...	$x_{2,m+1}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2k}$	...	$x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l$	$P_l$	$c_l$	$x_l$	0	0	...	1	...	$x_{l,m+1}$	...	$x_{lj}$	...	$x_{lk}$	...	$x_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m$	$P_m$	$c_m$	$x_m$	0	0	...	0	...	$x_{m,m+1}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mk}$	...	$x_{mn}$
$m+1$			$z_0$	0	0	...	0	...	$z_{m+1} - c_{m+1}$	...	$z_j - c_j$	...	$z_k - c_k$	...	$z_n - c_n$

Предположим теперь, что по крайней мере одна из разностей  $z_j - c_j > 0$ . Перейдем к новому опорному плану, базис которого содержит  $m - 1$  векторов первоначального базиса  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . В качестве вектора, вводимого в базис, теоретически можно выбрать любой вектор, соответствующее значение разности  $z_j - c_j$  для которого положительно. Как указывает Данциг [17], число шагов, необходимых для получения оптимального плана, может быть существенно уменьшено, если ввести в базис такой вектор  $P_j$  с  $z_j - c_j > 0$ , который связан с максимально возможным на данном шаге уменьшением значения линейной формы. Вектор  $P_j$  в этом случае будет соответствовать

$$\max_j \theta_0 (z_j - c_j),$$

где  $\theta_0$  определяется для каждого  $j$  из соотношения (1.7). Если число индексов  $j$ , для которых  $z_j - c_j > 0$ , велико, применение вышеуказанного правила затруднительно. Более простой критерий для выбора вектора, подлежащего введению в базис, состоит в определении одного из векторов, соответствующих  $\max_j (z_j - c_j)$ . Этот критерий обычно применяется в большинстве вычислительных центров и оказывается вполне приемлемым. При его использовании переход от первого опорного плана к оптимальному осуществляется примерно за  $m$  шагов. В дальнейшем мы будем пользоваться вторым критерием.

Положим, что

$$\max_j (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0.$$

Тогда вектор  $P_k$  подлежит введению в новый базис. Подсчитаем теперь

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}}$$

для  $x_{ik} > 0^*$ ). Если все  $x_{ik} \leq 0$ , может быть найден план со сколь угодно малым значением линейной формы (теорема 1,

---

\*) Заметим, что индекс  $i$  соответствует лишь положительным компонентам рассматриваемого плана,

случай 2). Наши вычисления тогда заканчиваются. Допустим теперь, что некоторое  $x_{ik} > 0$  и

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}.$$

Вектор  $P_l$  тогда следует исключить из базиса. Новый план будет обладать базисом, состоящим из векторов  $P_1, \dots, P_{l-1}, P_{l+1}, \dots, P_m, P_k$ . Займемся вычислением нового плана и разложением векторов, не входящих в его базис, по векторам базиса.

Поскольку первоначальный базис  $(P_1 P_2 \dots P_m) = I_m$ , то

$$P_0 = x_1 P_1 + \dots + x_l P_l + \dots + x_m P_m \quad (2.2)$$

$$P_k = x_{1k} P_1 + \dots + x_{lk} P_l + \dots + x_{mk} P_m \quad (2.3)$$

и

$$P_j = x_{1j} P_1 + \dots + x_{lj} P_l + \dots + x_{mj} P_m. \quad (2.4)$$

Из (2.3)

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}} (P_k - x_{1k} P_1 - \dots - x_{mk} P_m). \quad (2.5)$$

Подставив выражение для  $P_l$  в (2.2), получаем

$$P_0 = x_1 P_1 + \dots + x_l \left[ \frac{1}{x_{lk}} (P_k - x_{1k} P_1 - \dots - x_{mk} P_m) \right] + \dots + x_m P_m$$

или

$$P_0 = \left( x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k} \right) P_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}} P_k + \dots + \left( x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk} \right) P_m^*.$$

Таким образом, новый план  $X' = (x'_1, \dots, x'_k, \dots, x'_m)$ ,  $x'_i \geq 0$ , определяемый соотношением

$$P_0 = x'_1 P_1 + \dots + x'_k P_k + \dots + x'_m P_m,$$

вычисляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m, \\ x'_k &= \frac{x_l}{x_{lk}}. \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

---

\*) Это выражение эквивалентно формуле (1.5) при  $j=k$  и  $\theta = \frac{x_l}{x_{lk}}$ .

Аналогично, подставляя (2.5) в (2.4), получаем разложение каждого вектора  $P_j$ , не входящего в базис нового плана, по векторам этого базиса

$$P_j = x'_{1j}P_1 + \dots + x'_{kj}P_k + \dots + x'_{mj}P_m$$

где

$$\left. \begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq l, \\ x'_{kj} &= \frac{x_{lj}}{x_{lk}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Поскольку

$$z'_j - c_j = x'_{1j}c_1 + \dots + x'_{kj}c_k + \dots + x'_{mj}c_m - c_j,$$

непосредственное применение формул (2.7) дает

$$z'_j - c_j = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k).$$

Аналогично, подставляя выражение для  $x'$  из (2.6) в соотношение

$$z'_0 = c_1 x'_1 + \dots + c_k x'_k + \dots + c_m x'_m,$$

получаем

$$z'_0 = z_0 - \frac{x_l}{x_{lk}} (z_k - c_k).$$

Заметим теперь, что для получения нового плана  $X'$ , новых векторов  $X'_i$  и соответствующих разностей  $z'_j - c_j$ , каждый элемент таблицы 1 для строк  $i = 1, \dots, m+1$  и столбцов  $j = 0, 1, \dots, n$  преобразуется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq l, \\ x'_{lj} &= \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где

$$x'_i = x'_{i0} \quad z'_0 = x'_{m+1,0} \quad z'_j - c_j = x'_{m+1,j}.$$

Общие формулы (2.8) применяются ко всем элементам вычислительной таблицы, включая столбец  $P_0$  и  $(m+1)$ -ю строку. Преобразование, осуществляемое формулами (2.8), эквива-

лентно преобразованию по методу полного исключения, где за направляющий элемент принимается  $x_{lk}^*$ ).

После того как исходная таблица заполнена, вычисления отдельной итерации производятся в такой последовательности:

1. Просматриваются значения разностей  $z_j - c_j$  и определяется, не является ли оптимальным рассматриваемый план, т. е. не выполняется ли для всех  $j$  неравенство  $z_j - c_j \leq 0$ .

2. Если для некоторого  $j$  значение  $z_j - c_j > 0$ , выбирается вектор, подлежащий вводу в базис, для чего разыскивается индекс  $j$ , отвечающий  $\max_j (z_j - c_j)$ .

3. Выбирается вектор, подлежащий исключению из базиса. Этот вектор соответствует  $\min_i \left( \frac{x_i}{x_{ik}} \right)$  для всех  $x_{ik} > 0$ . Здесь  $k$  — индекс вектора, выбранного в п. 2. Если все  $x_{ik} \leq 0$ , линейная форма задачи не ограничена (снизу).

4. После выделения направляющей строки и направляющего столбца таблица, соответствующая старому плану, преобразуется по формулам (2.8).

В результате каждой такой итерации образуется новый опорный план. В силу теорем 1 и 2 мы в конце концов придем либо к оптимальному плану, либо убедимся в неограниченности линейной формы задачи.

После проведения первой итерации получаем таблицу 2.

**Пример.** В качестве примера решим с помощью симплексного метода следующую задачу линейного программирования:

Минимизировать

$$x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

---

\*) При применении формул (2.8) к таблице можно использовать две схемы. Для вычислений вручную лучше сперва подсчитать новые элементы направляющей строки ( $l$ -й строки), а затем вычесть из других строк произведения этой строки на соответствующие элементы  $k$ -го столбца. При машинных вычислениях лучше всего подсчитать сначала отношения  $\frac{x_{lk}}{x_{lk}}$ , соответствующие направляющему столбцу ( $k$ -й столбец). Преобразование полного исключения тогда осуществляется применением формул (2.8) к каждому столбцу.

Таблица 2. Вторая итерация вычислительного процесса

$i$	Базис	$c$	$P_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_l$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_k$	$\dots$	$c_n$
				$P_1$	$P_2$	$\dots$	$P_l$	$\dots$	$P_m$	$P_{m+1}$	$\dots$	$P_j$	$\dots$	$P_k$	$\dots$	$P_n$
1	$P_1$	$c_1$	$x'_1$	1	0	$\dots$	$x'_{1l}$	$\dots$	0	$x'_{1, m+1}$	$\dots$	$x'_{1j}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{1n}$
2	$P_2$	$c_2$	$x'_2$	0	1	$\dots$	$x'_{2l}$	$\dots$	0	$x'_{2, m+1}$	$\dots$	$x'_{2j}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l$	$P_k$	$c_k$	$x'_k$	0	0	$\dots$	$x'_{ll}$	$\dots$	0	$x'_{l, m+1}$	$\dots$	$x'_{lj}$	$\dots$	1	$\dots$	$x'_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m$	$P_m$	$c_m$	$x'_m$	0	0	$\dots$	$x'_{ml}$	$\dots$	1	$x'_{m, m+1}$	$\dots$	$x'_{mj}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{mn}$
$m+1$			$z'_0$	0	0	$\dots$	$z'_l - c_l$	$\dots$	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$z'_j - c_j$	$\dots$	0	$\dots$	$z'_n - c_n$

при условиях

$$x_j \geq 0$$

и

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 &= 10. \end{aligned}$$

Исходный базис (см. табл. 3, первая итерация) состоит из векторов  $P_1, P_4, P_6$ ; ему соответствует план  $X = (x_1, x_4, x_6) = (7, 12, 10)$ . Поскольку  $c_1 = c_4 = c_6 = 0$ , значение линейной формы  $z_0$  равно нулю. В базис вводится вектор  $P_3$ , так как  $\max_j (z_j - c_j) = z_3 - c_3 = 3 > 0$ .  $\theta_0$  равно минимуму  $\frac{x_i}{x_{i3}}$  для  $x_{i3} > 0$ , т. е.

$$\min \left( \frac{12}{4}, \frac{10}{3} \right) = \frac{12}{4} = \theta_0.$$

Следовательно, вектор  $P_4$  подлежит исключению из базиса. Преобразовав таблицу (см. табл. 3, вторая итерация), получаем новый план  $X' = (x_1, x_3, x_6) = (10, 3, 1)$ , соответствующий значению линейной формы, равному  $-9$ . Имеем:

$$\max_j (z'_j - c_j) = z'_2 - c_2 = \frac{1}{2} > 0$$

и

$$\theta_0 = \frac{10}{5/2},$$

поэтому во второй итерации в базис вводится вектор  $P_2$ , а  $P_1$  исключается. Преобразовав таблицу второй итерации, получаем третий план

$$X'' = (x_2, x_3, x_6) = (4, 5, 11),$$

соответствующий значению линейной формы, равному  $-11$ . Так как

$$\max_j (z''_j - c_j) = 0,$$

то этот план является оптимальным. Для контроля вычислений величины  $z_0$  и  $z_j - c_j$  полезно определять двояким способом: непосредственно и по рекуррентным формулам (2.8).

Если для оптимального плана некоторая разность  $z_j - c_j = 0$  и вектор  $P_j$  не входит в последний базис, его можно ввести



Т а б л и ц а 3  
Первая итерация

$i$	Базис	$c$	$P_0$	0	1	-3	0	2	0
				$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	$P_1$	0	7	1	3	-1	0	2	0
2	$P_4$	0	12	0	-2	4	1	0	0
3	$P_6$	0	10	0	-4	3	0	8	1
4			0	0	-1	3	0	-2	0

Вторая итерация

			$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	$P_1$	0	10	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
2	$P_3$	-3	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
3	$P_6$	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
4			-9	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	-2	0

Третья итерация

			$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	$P_2$	1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
2	$P_3$	-3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
3	$P_6$	0	11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
4			-11	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

в этот базис без изменения значения линейной формы. Получающийся в результате этого план также будет оптимальным. Таким образом можно определить несколько оптимальных планов. Любая выпуклая комбинация этих планов также будет решением задачи.

### § 3. Метод искусственного базиса

До сих пор мы предполагали, что рассматриваемая задача линейного программирования обладает планами и содержит единичную матрицу, из которой может быть составлен первоначальный базис. Несмотря на то, что корректная постановка задачи обычно гарантирует наличие у нее плана, многие задачи линейного программирования не содержат единичной матрицы. В таких случаях удобно использовать метод искусственного базиса (см. Орден [84]). Этот метод, в частности, позволяет определить, имеет ли вообще задача планы, или же их нет.

Общая задача линейного программирования заключается в отыскании минимума

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

и

$$x_j \geq 0.$$

Рассмотрим расширенную задачу, связанную с минимизацией линейной формы

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n + \omega x_{n+1} + \omega x_{n+2} + \dots + \omega x_{n+m}$$

переменные которой подчинены условиям

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$  для  $j = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m$ . Величина  $w$  здесь предполагается достаточно большим положительным числом, значение которого заранее не задается. Векторы  $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$  образуют базис, называемый *искусственным*. Если первоначальная задача обладает по крайней мере одним планом, то он является также планом и для расширенной задачи. Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждое из искусственных переменных  $x_{n+i}$  равно нулю.

Если первоначальная задача не обладает планами, то решение расширенной задачи будет содержать по крайней мере одно  $x_{n+i} > 0$ . Как будет показано ниже, точного значения  $w$  можно не фиксировать. Вектор

$$X = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

может быть принят в качестве исходного плана расширенной задачи. При этом значение линейной формы равно

$$z_0 = w \sum_{i=1}^m b_i.$$

Поскольку базисом является единичная матрица,

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

и

$$z_j = w \sum_{i=1}^m x_{ij}.$$

Всякий раз, когда в базисе будут содержаться искусственные векторы, разности  $z_j - c_j$  будут линейными функциями  $w$ . Для исходного плана

$$z_j - c_j = w \sum_{i=1}^m x_{ij} - c_j.$$

Каждая из разностей  $z_j - c_j$  состоит из двух независимых друг от друга частей, одна из которых зависит от  $w$ , а другая — нет. Сведем теперь результаты вычислений в таблицу 4. Для каждого  $j$  в  $(m+1)$ -ю и  $(m+2)$ -ю строки помещаются соответственно коэффициенты  $z_j - c_j$  при 1 и  $w$ .

Т а б л и ц а 4. Первая итерация вычислительного процесса с искусственным базисом

$i$	Базис	$c$	$P_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_n$	$w$	...	$w$	...	$w$
				$P_1$	$P_2$	...	$P_k$	...	$P_n$	$P_{n+1}$	...	$P_{n+l}$	...	$P_{n+m}$
1	$P_{n+1}$	$w$	$x_{n+1}$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$	...	$x_{1n}$	1	...	0	...	0
2	$P_{n+2}$	$w$	$x_{n+2}$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$	...	$x_{2n}$	0	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l$	$P_{n+l}$	$w$	$x_{n+l}$	$x_{l1}$	$x_{l2}$	...	$x_{lk}$	...	$x_{ln}$	0	...	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m$	$P_{n+m}$	$w$	$x_{n+m}$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mk}$	...	$x_{mn}$	0	...	0	...	1
$m+1$			0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_k$	...	$-c_n$	0	...	0	...	0
$m+2$			$\sum x_{n+i}$	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	...	$\sum x_{ik}$	...	$\sum x_{in}$	0	...	0	...	0

Эта таблица обрабатывается совершенно аналогично обычной первоначальной симплексной таблице (табл. 1), за исключением того, что вектор, вводимый в базис, связывается теперь с наибольшим положительным элементом  $(m+2)$ -й строки. В первой итерации в базис вводится вектор, соответствующий  $\max_j \sum_{i=1}^m x_{ij}$ . Элементы  $(m+2)$ -й строки преобра-

зуются в соответствии с рекуррентными формулами (2.8). Искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, не имеет смысла в дальнейшем вводить ни в один из последующих базисов, и, следовательно, преобразование  $m$  последних столбцов таблицы излишне. Однако при необходимости обращения окончательного базиса (получения соответствующей обратной матрицы) последние  $m$  векторов также подлежат преобразованию\*). Следует заметить, что иногда в результате отдельной итерации ни один из искусственных векторов не исключается. Для получения оптимального плана при использовании полного искусственного базиса требуется приблизительно  $2m$  итераций.

Руководствуясь элементом  $(m+2)$ -й строки как критерием, продолжают отбирать вектор для введения в базис до тех пор, пока либо

1) все искусственные векторы будут исключены из базиса, либо

2)  $(m+2)$ -я строка не будет больше содержать положительных элементов в столбцах с номерами от 1 до  $(n+m)$ .

В первом случае все элементы  $(m+2)$ -й строки равны нулю и соответствующий базис отвечает некоторому плану первоначальной задачи. После этого для определения оптимального плана применяется обычный симплексный алгоритм. Во втором случае, если элемент, стоящий в  $(m+2)$ -й строке и нулевом столбце\*\*) (элемент  $(m+2, 0)$ ), больше нуля, то первоначальная задача не имеет решения (не обладает планами).

Теорема 2 утверждает, что не существует другого плана, на котором значение линейной формы будет меньше, чем при

---

\*) См. Орден [84].

\*\*) Значение линейной формы на каждом из планов расширенной задачи является линейной функцией  $w$ . В  $(m+2)$ -й строке и нулевом столбце таблицы содержится коэффициент этой функции при  $w$ .

этом последнем плане. Если элемент  $(m+2, 0)$  равен нулю, полученный план первоначальной задачи — вырожденный и содержит по меньшей мере один из векторов искусственного базиса.

Естественно, что компоненты этого плана, соответствующие искусственным векторам, равны нулю. Полученный план, вообще говоря, не является оптимальным. При последующих итерациях в базис вводится вектор, соответствующий максимальному положительному элементу, находящемуся над нулевым элементом  $(m+2)$ -й строки \*). Этот критерий используется до тех пор, пока не будет достигнут оптимальный план, т. е. пока среди элементов  $(m+1)$ -й строки, расположенных над нулевыми элементами  $(m+2)$ -й строки, больше не останется положительных. При использовании рассматриваемого критерия элементы  $(m+2)$ -й строки преобразовывать не следует, поскольку разность  $z_j - c_j$  для вводимого вектора равна

$$0w + (z_j - c_j).$$

Как в первом, так и во втором случаях, все элементы  $(m+2)$ -й строки неположительны, исключая, возможно, элемент нулевого столбца, который всегда неотрицателен и в процессе решения не возрастает. Как указал Орден, в случае, если первоначальная задача, обладая планами, имеет неограниченный минимум, метод искусственного базиса определит наличие планов до выявления неограниченности линейной формы.

Если первоначальная задача содержит несколько единичных векторов, их следует включить в искусственный базис. Это уменьшит количество вводимых искусственных переменных и сократит число необходимых для решения итераций. Способ искусственного базиса иллюстрируется следующим примером \*\*).

---

\*) Этот процесс заставляет искусственные переменные, все еще находящиеся в плане, оставаться равными нулю, и ведет к уменьшению значения линейной формы.

\*\*) Этот простой пример, иллюстрирующий технику вычислений по методу искусственного базиса, указывает также на целесообразность предварительного анализа условий задачи. Поскольку

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$$

задача здесь в действительности заключается в отыскании максимума линейной формы  $15 - x_4$ .

Пример. Максимизировать

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

и

$$x_j \geq 0.$$

Эта задача эквивалентна минимизации линейной формы

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

при сохранении прежних ограничений.

Поскольку условия задачи содержат единичный вектор  $P_4$ , необходимо ввести лишь два дополнительных вектора  $P_5$  и  $P_6$ . Исходным планом (см. табл. 5) является

$$X = (x_5, x_6, x_4) = (15, 20, 10),$$

причем соответствующее ему значение линейной формы равно  $10 + 35\omega$ . Каждое  $z_j$  совпадает со скалярным произведением вектора  $P_j$  и вектора-столбца  $c$ . Например,

$$z_1 - c_1 = \omega + 2\omega + 1 - (-1) = 2 + 3\omega.$$

В базис вводится  $P_3$ , так как максимальным элементом  $(m+2, j)$  является элемент  $(m+2, 3)$ , равный 8. Соответствующее  $\theta_0 = \frac{20}{5}$ , и дополнительный вектор  $P_6$  исключается из базиса.

Преобразуем все элементы первой части таблицы 5 (первая итерация) по рекуррентным формулам (2.8). Новым планом является

$$X' = (x_5, x_3, x_4) = (3, 4, 6)$$

с соответствующим значением линейной формы, равным  $-6 + 3\omega$ . Вводим в базис  $P_2$  и исключаем  $P_5$ . Поскольку все элементы  $(m+2)$ -й строки третьей части таблицы 5 (третья итерация) неположительны, а элемент ее нулевого столбца равен нулю, в третьей итерации получен план

Таблица 5  
Первая итерация

$i$	Базис	$c$	$P_0$	—1	—2	—3	1	$w$	$w$
				$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	$P_5$	$w$	15	1	2	3	0	1	0
2	$P_6$	$w$	20	2	1	5	0	0	1
3	$P_4$	1	10	1	2	1	1	0	0
4			10	2	4	4	0	0	0
5			35	3	3	8	0	0	0

Вторая итерация

$P_5$	$w$	3	—1/5	7/5	0	0	1
$P_3$	—3	4	2/5	1/5	1	0	0
$P_4$	1	6	3/5	9/5	0	1	0
		—6	2/5	16/5	0	0	0
		3	—1/5	7/5	0	0	0

Третья итерация

$P_2$	—2	15/7	—1/7	1	0	0
$P_3$	—3	25/7	3/7	0	1	0
$P_4$	1	15/7	6/7	0	0	1
		—90/7	6/7	0	0	0
		0	0	0	0	0

Четвертая итерация

$P_2$	—2	5/2	0	1	0	1/6
$P_3$	—3	5/2	0	0	1	—3/6
$P_1$	—1	5/2	1	0	0	7/6
		—15	0	0	0	—1



первоначальной задачи. Этим планом является

$$X'' = (x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7} \right)$$

при значении линейной формы, равном  $-\frac{90}{7}$ . В результате четвертой итерации получаем решение

$$X''' = (x_2, x_3, x_1) = \left( \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

при  $x_4 = 0$  и значении линейной формы, равном  $-15$ . Оптимальное значение линейной формы равно  $+15$ , поскольку первоначально мы имели дело с задачей на максимум.

Если задача линейного программирования первоначально ставится в виде  $AX \leq b$  (все компоненты вектора  $b$  предполагаются неотрицательными), то исходная вычислительная таблица будет содержать единичную матрицу порядка  $m$ . Эта матрица появляется в результате замены каждого неравенства равенством, путем добавления неотрицательной переменной, называемой *дополнительной*. Дополнительным переменным соответствуют коэффициенты линейной формы, равные нулю.

Если первоначальная задача была поставлена в виде  $AX \geq b$ , то, вообще говоря, необходимо введение искусственных векторов. Далее это описывается в § 1 гл. 10.

#### § 4. Геометрическая интерпретация симплексного метода

Симплексный метод, изложенный ранее с алгебраической точки зрения, имеет геометрическую интерпретацию, описанную Гофманом, Манносом, Соколовским и Вигманом [61а]. Впервые она была дана Данцигом [17].

Пусть  $(m+1)$ -мерные векторы  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$  образуются присоединением к  $m$ -мерным векторам-столбцам  $P_1, P_2, \dots, P_n$  коэффициентов линейной формы  $c_1, c_2, \dots, c_n$  соответственно. Таким образом,  $c_j$  является  $(m+1)$ -й координатой вектора  $P_j$ . Пусть  $S$  — выпуклый конус в  $(m+1)$ -мерном пространстве, порождаемый векторами  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ . Обозначим через  $B$  прямую  $(m+1)$ -мерного пространства, все точки которой имеют первые  $m$  координат равными  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Эта пря-

мая образуется  $(m+1)$ -мерными векторами  $P'_0$ , первые  $m$  компонент которых равны  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , а последняя принимает любые значения. Задача состоит в отыскании наинизшей точки прямой  $B$ , принадлежащей  $C$ , т. е. такой точки  $B$ , лежащей в конусе  $C$ ,  $(m+1)$ -я координата которой минимальна.

Метод вычислений заключается в следующем. Допустим, что  $m$  из векторов  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ , скажем первые  $m$ , линейно независимы и  $m$ -мерный конус  $D$ , порождаемый этими векторами, содержит точку прямой  $B$ . Это допущение равносильно утверждению, что  $m$  векторов являются базисом некоторого плана исследуемой задачи. Такими векторами могут быть как заданные, так и искусственные. Гиперплоскость, содержащая  $D$ , делит остающиеся векторы  $P'_j$  на две группы. Одна из этих групп состоит из тех векторов, которые расположены по ту же сторону гиперплоскости, что и положительное направление  $(m+1)$ -й координатной оси. Вторая группа содержит все векторы, лежащие ниже гиперплоскости. Каждый из векторов второй группы может быть выбран для введения в новый базис. Любой из них можно соединить с гиперплоскостью, содержащей  $D$ , отрезком, параллельным  $(m+1)$ -й координатной оси.

Пусть  $P'_k$  — вектор, которому отвечает наибольший из таких отрезков. Это соответствует выбору вектора, для которого  $z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j) > 0$ . Вектор  $P'_k$  и определенная подсистема из  $m-1$  векторов системы  $P'_1, \dots, P'_m$  обладают тем свойством, что образуемый ими  $m$ -мерный конус содержит точку прямой  $B$ , причем эта точка расположена ниже пересечения  $D$  с  $B$ . Таким образом, исключенный вектор заменяется вектором  $P'_k$ , и процесс продолжается до получения оптимального плана.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим задачу отыскания минимума линейной формы

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

Имеем

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P'_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P'_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Изобразим эти точки, как показано на рис. 14. Поскольку прямая  $B$  пересекает конус  $C$ , задача обладает планами. Можно

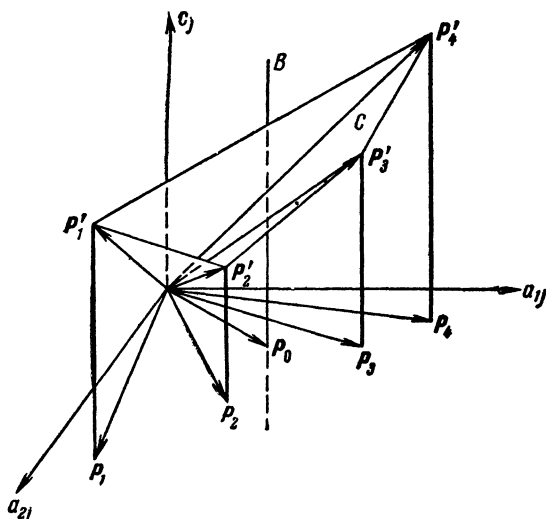


Рис. 14.

легко показать, что  $P'_1$  и  $P'_4$  линейно независимы и что  $P_0$  можно выразить положительной комбинацией  $P_1$  и  $P_4$ . Выбираем в качестве векторов первого базиса  $P_1$  и  $P_4$  и определяем двумерный конус, образованный векторами  $P'_1$  и  $P'_4$  (рис. 15). Точка  $P'_2$ , лежащая ниже гиперплоскости, содержащей  $D$ , отстоит от нее на расстоянии  $z_2 - c_2$ , где  $z_2$  определяется формулой (1.4). Точка  $P'_3$  расположена также ниже рассматриваемой гиперплоскости и отстоит от нее на расстоянии  $z_3 - c_3$ .

Поскольку  $z_2 - c_2 > z_3 - c_3$ , то в базис следует ввести вектор  $P_2$ .

Из рис. 15 видно, что  $P_0$  можно выразить положительной комбинацией векторов  $P_2$  и  $P_4$  и нельзя выразить положи-

тельной комбинацией  $P_2$  и  $P_1$ , т. е.  $P_0$  не содержится в конусе, образованном векторами  $P_1$  и  $P_2$ . Следовательно, вводя в базис  $P_2$  и исключая из него вектор  $P_1$ , получим новый базис, состоящий из  $P_2$  и  $P_4$ . Проведя для этого базиса аналогичные исследования, введем в него вектор  $P_3$  и исключим

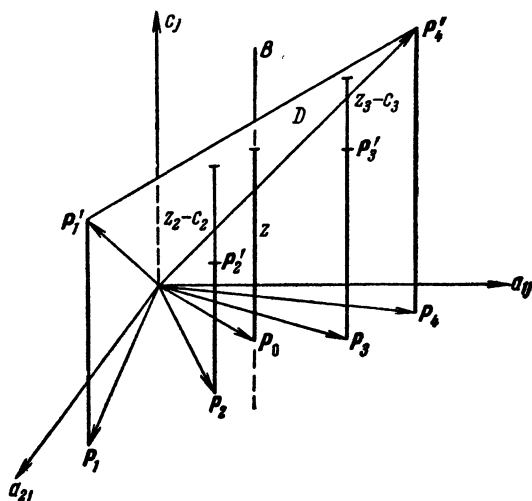


Рис. 15.

вектор  $P_4$ . Этот последний базис, состоящий из векторов  $P_2$  и  $P_3$ , соответствует оптимальному плану.

Симплексный процесс может быть также интерпретирован как движение по соседним крайним точкам \*) многогранника условий задачи (см. § 4 гл. 2 и Саати [88]).

На рис. 16 изображен многогранник  $K$ , определяемый условиями задачи. Крайняя точка, от которой начинается процесс, обозначена через  $\bar{X}_4$ . Через эту точку проведена прямая вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const},$$

где  $c_1x_1 + c_2x_2$  — линейная форма рассматриваемой задачи.

\*) Две крайние точки называются соседними, если они расположены на одном ребре многогранника. (Прим. ред.)

При следующей итерации будем перемещать эту прямую параллельно самой себе, пока она не пройдет через  $\bar{X}_3$ . В результате двух последующих итераций прямая пройдет

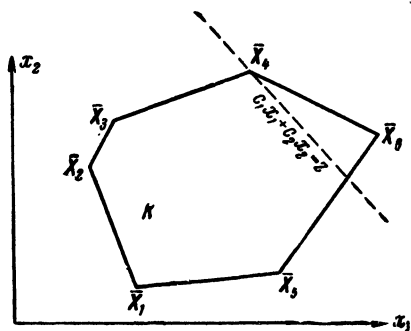


Рис. 16.

через  $\bar{X}_1$  и будет получен оптимальный план. Общее число итераций, необходимых для достижения минимума, зависит от того, какой из планов принимается за исходный. Если, как в вышеприведенном примере, процесс начинается с плана, соответствующего крайней точке  $\bar{X}_4$ , требуются три итерации. Если же в качестве исходного взять план, со-

ответствующий точке  $\bar{X}_5$ , то потребуется всего лишь одна итерация.

Заметим, что линейная форма любой задачи может быть за счет соответствующей замены переменных приведена к такому виду, что величина  $z$  совпадает с расстоянием прямой  $c_1x_1 + c_2x_2 = z$  от начала координат.

### У п р а ж н е н и я

1. Решить симплексным методом следующие задачи линейного программирования:

а) Минимизировать

$$x_1 + x_2 + x_3$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 & + & 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 & + & 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \end{array}$$

и  $x_j \geq 0$ .

б) Минимизировать

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 & & + 2x_6 = 2, \\ x_1 & + & 2x_5 + 2x_6 = 6 \end{array}$$

и  $x_j \geq 0$ .

с) Минимизировать

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

d) Минимизировать

$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

e) Максимизировать

$$x_4 - x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &\geq 0, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geq 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

f) Максимизировать

$$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$$

при условиях

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 10, \\ -x_1 + x_3 + x_6 + x_7 &= 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 &= 6 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

g) Минимизировать

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

при условиях

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

2. Дана задача линейного программирования, оптимальный план которой связан с конечным значением линейной формы. Пусть минимальное значение линейной формы равно  $z_0$ . При решении задачи симплексным методом на  $k$ -й итерации возник вырожденный план, в котором только одна из  $m$  компонент  $x_i = 0$ . Этому плану соответствует значение линейной формы, равное  $z_k$ , причем  $z_k > z_0$ .

Доказать, что этот  $k$ -й базис не может вновь появиться при последующих итерациях.

3. Решить задачу 1с), выбрав в качестве исходного базиса систему векторов  $P_1, P_2$  и  $P_3$ ; решить также задачу 1е), выбрав в качестве исходного базиса векторы  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$ .

4. (Исследование решения, близкого к оптимальному, в симплексном процессе по Л. Гольдстейну.) Дана задача линейного программирования с заданной верхней границей  $S$  суммы переменных, например транспортная задача.

Пусть  $z$  — величина линейной формы, соответствующая данному опорному плану, и  $z_0$  — неизвестное минимальное значение этой формы. Пусть для данного опорного плана  $k = z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j)$ .

Показать, что  $z - z_0 \leq \varepsilon$  при  $k \leq \frac{\varepsilon}{S}$ .

---

## ГЛАВА 5

### ПРОБЛЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

С каждой задачей линейного программирования, определенной в § 1 гл. 4, можно связать некоторую другую линейную задачу, называемую *двойственной* \*). Первоначальную задачу будем называть *исходной*. Оптимальный план одной из задач тесно связан с оптимальным планом другой задачи. Если начальная симплексная таблица исходной задачи содержит единичную матрицу порядка  $m$ , то симплексный процесс, примененный к одной из задач, автоматически приводит к решению другой задачи. В настоящей главе будут сформулированы и доказаны теоремы, связанные с двойственными задачами, принадлежащие Данцигу и Ордену [31]. Дополнительные сведения по этим вопросам читатель может почерпнуть из работ Гэйла, Куна и Таккера [45], Вайда [97] и Куна и Таккера [68].

#### § 1. Несимметричные двойственные задачи

Исходная задача \*\*). Определить вектор-столбец

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

минимизирующий линейную форму

$$f = cX \tag{1.1}$$

---

\*) Иногда двойственную задачу называют сопряженной задачей. (Прим. ред.)

\*\*) Здесь исходной названа задача минимизации. Вообще говоря, в качестве исходной может рассматриваться любая из задач двойственной пары.





что окончательный базис состоит из первых  $m$  векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .

Пусть  $B$  — матрица, составленная из компонент векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Последняя симплексная таблица содержит векторы исходной системы  $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$ , разложенные по векторам окончательного базиса, т. е. каждому вектору  $P_j$  в этой таблице соответствует такой вектор  $X_j$ , что  $P_j = BX_j$ .

Обозначим через  $\bar{X} = (X_1 X_2 \dots X_m X_{m+1} \dots X_n)$  матрицу, составленную из коэффициентов окончательной симплексной таблицы. Поскольку мы предположили, что окончательный базис содержит первые  $m$  векторов, то

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1,m+1} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{2,m+1} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{m,m+1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальный план совпадает с вектором  $X^0 = B^{-1}b$ , причем имеют место следующие соотношения:

$$A = B\bar{X}, \quad B^{-1}A = \bar{X}, \quad (1.6)$$

$$b = BX^0, \quad B^{-1}b = X^0, \quad (1.7)$$

$$\min f = c^0 X^0, \quad (1.8)$$

$$Z = c^0 \bar{X} - c \leq 0, \quad (1.9)$$

где  $c^0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  — вектор-строка. Согласно (1.4) и результатам гл. 4,

$$\begin{aligned} Z &= (c^0 X_1 - c_1, c^0 X_2 - c_2, \dots, c^0 X_n - c_n) = \\ &= (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \dots, z_n - c_n) \end{aligned}$$

— вектор, компоненты которого неположительны, поскольку они совпадают с величинами  $z_j - c_j$ , соответствующими оптимальному плану. Здесь вектор  $O$  является нулевым  $n$ -мерным вектором.

Пусть  $W^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0)$  определяется из соотношения

$$W^0 = c^0 B^{-1}.$$

Тогда согласно (1.6) и (1.9) имеем

$$W^0 A - c = c^0 B^{-1} A - c = c^0 \bar{X} - c \leq 0$$

или

$$W^0 A \leq c.$$

Вектор  $W^0$ , таким образом, является планом двойственной задачи, поскольку он удовлетворяет ее условиям (1.5). При этом соответствующее значение линейной формы двойственной задачи (1.4) равно  $W^0 b$ . Учитывая, далее, соотношения (1.7) и (1.8), получаем

$$W^0 b = c^0 B^{-1} b = c^0 X^0 = \min f. \quad (1.10)$$

Следовательно, значение линейной формы двойственной задачи, соответствующее плану  $W^0$ , совпадает с минимальным значением линейной формы исходной задачи.

Теперь нам осталось лишь показать, что  $W^0$  является оптимальным планом двойственной задачи.

Для любого  $n$ -мерного вектора  $X$ , удовлетворяющего условиям (1.2) и (1.3), и любого  $m$ -мерного вектора  $W$ , удовлетворяющего условиям (1.5), получаем

$$WAX = Wb = g(W) \quad (1.11)$$

и

$$WAX \leq cX = f(X). \quad (1.12)$$

Сравнивая (1.11) и (1.12), приходим к неравенству

$$g(W) \leq f(X), \quad (1.13)$$

справедливому для любых  $W$  и  $X$ , являющихся планами двойственной и исходной задач соответственно. Отсюда следует, что экстремальные значения (1.1) и (1.4) связаны соотношением

$$\max g(W) \leq \min f(X). \quad (1.14)$$

Для плана двойственной задачи  $W^0$  согласно (1.10) имеем

$$g(W^0) = W^0 b = \min f(X). \quad (1.15)$$

Таким образом, линейная форма двойственной задачи достигает на плане  $W^0$  максимального значения, откуда, учитывая

(1.15), имеем

$$\max g = \min f. \quad (1.16)$$

Полученные выше результаты справедливы всякий раз, когда исходная задача обладает оптимальным планом. Подобным же образом можно показать, что если двойственная задача имеет решение, то исходная также обладает решением, причем опять имеет место соотношение (1.16). Первая часть теоремы доказана \*).

Для доказательства второй части заметим, что в случае неограниченности линейной формы исходной задачи из (1.13) следует

$$g(W) \leq -\infty, \quad (1.17)$$

т. е. любое решение системы двойственных неравенств (1.5) должно соответствовать значению двойственной линейной формы (1.4), меньшему или равному минус бесконечности. Так как это соотношение лишено смысла, мы должны заключить, что двойственная задача не обладает планами. Аналогичными рассуждениями показывается, что в случае неограниченности линейной формы двойственной задачи исходная задача не имеет планов.

**Пример.** В качестве исходной возьмем задачу, решенную в § 2 гл. 4 симплексным методом.

*Исходная задача.* Минимизировать

$$x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

---

\*) Доказательство теоремы проведено для того случая, когда каждый план исходной задачи невырожден. Это условие гарантирует достижение оптимального плана с помощью симплексного процесса, описанного в предыдущей главе. Наличие вырожденной ситуации требует особого рассмотрения. (Прим. ред.)

Здесь  $c = (0, 1, -3, 0, 2, 0)$ ,  $b = (7, 12, 10)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Двойственная задача.* Максимизировать

$$7w_1 + 12w_2 + 10w_3$$

при условиях

$$\begin{aligned} w_1 &\leq 0, \\ 3w_1 - 2w_2 - 4w_3 &\leq 1, \\ -w_1 + 4w_2 + 3w_3 &\leq -3, \\ w_2 &\leq 0, \\ 2w_1 + 8w_3 &\leq 2, \\ w_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Окончательный базис, соответствующий решению исходной задачи, полученному симплексным методом в § 2 гл. 4, состоит из векторов  $P_2, P_3, P_6$ , т. е.

$$B = (P_2 P_3 P_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующим решением  $X^0$  является

$$\begin{aligned} X^0 = B^{-1}b &= (x_2^0, x_3^0, x_6^0) = (4, 5, 11), \\ c^0 &= (c_2, c_3, c_6) = (1, -3, 0), \end{aligned}$$

и минимальное значение линейной формы равно

$$c^0 X^0 = (1, -3, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = -11.$$

Из окончательной симплексной таблицы (см. табл. 4, третья итерация) получаем

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор  $Z$  для оптимального плана равен

$$Z = c^0 \bar{X} - c = (1, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 10 & 1 \end{pmatrix} - \\ - (0, 1, -3, 0, 2, 0)$$

или

$$Z = \left( -\frac{1}{5}, 0, 0, -\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}, 0 \right) \leq 0.$$

Компоненты  $Z$  содержатся в  $(m+1)$ -й строке окончательной таблицы, т. е. совпадают с  $z_j - c_j$ .

При рассмотрении метода исключения, изложенного в § 5 гл. 2, было показано, что если исходная матрица коэффициентов уравнений содержит единичную матрицу или дополняется таковой, то решение уравнений по методу исключения приводит к обращению матрицы, составленной из векторов базиса, соответствующего этому решению. В процессе полного исключения искомая обратная матрица образуется на месте единичной матрицы. Это же свойство справедливо для задач линейного программирования, решаемых симплексным методом. Если матрица  $A$  коэффициентов исходной задачи содержит единичную матрицу или дополняется ею, то

в каждой итерации матрица обращенного базиса образуется на месте столбцов единичной матрицы. В нашем примере матрица  $A$  содержит единичную матрицу, столбцами которой являются  $P_1, P_4, P_6$ . Следовательно, в окончательной таблице рассматриваемого примера столбцы  $P_1, P_4, P_6$  преобразуются в матрицу, обратную  $B$ . В этих столбцах помещаются векторы  $X_1, X_4$  и  $X_6$  и, следовательно,

$$B^{-1} = (X_1 \ X_4 \ X_6) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было показано при доказательстве теоремы двойственности, оптимальным планом двойственной задачи является:

$$W^0 = c^0 B^{-1} = (1, -3, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right).$$

Подставляя этот план в условие двойственной задачи, получаем  $W^0 A \leq c$ :

$$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$-\frac{1}{5} \leq 0, \quad 1 \leq 1, \quad -3 \leq -3, \quad -\frac{4}{5} \leq 0, \quad -\frac{2}{5} \leq 2, \quad 0 \leq 0.$$

Значение двойственной линейной формы равно

$$W^0 b = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = -11.$$

Если матрица  $A$  содержит единичную матрицу, то нет необходимости определять значения составляющих оптимального плана двойственной задачи умножением  $c^0 B^{-1}$ . Имеем

$$W^0 = c^0 B^{-1} = c^0 (X_1 X_4 X_6) = (w_1^0, w_2^0, w_3^0).$$

По определению  $z_j$

$$c^0 X_1 = z_1, \quad c^0 X_4 = z_4 \quad \text{и} \quad c^0 X_6 = z_6.$$

В  $(m+1)$ -й строке окончательной таблицы каждому  $X_j$  соответствует элемент  $z_j - c_j$ . Заметим, что  $c_j$  для  $j=1, 4, 6$  равно нулю и, следовательно, элементы  $(m+1)$ -й строки при  $j=1, 4, 6$  равны соответствующим величинам двойственных переменных, т. е.  $w_1^0 = z_1$ ,  $w_2^0 = z_4$  и  $w_3^0 = z_6$ .

Если вектору, входящему в единичную матрицу, соответствует  $c_j \neq 0$ , то для получения  $w_i^0$  необходимо к соответствующей величине разности  $z_j - c_j$ , расположенной в  $(m+1)$ -й строке окончательной таблицы, прибавить  $c_j$ .

Заметим, что если в исходной симплексной таблице единичный вектор с  $i$ -й компонентой, равной единице, расположен в  $j$ -м столбце, то  $w_i^0 = z_j$ .

В нашем примере  $w_2^0 = z_4$ , поскольку  $P_4$  — единичный вектор, вторая компонента которого равна единице.

В § 2 будет рассмотрена разновидность двойственных несимметричных задач (симметричные задачи). В симметричных двойственных задачах условиями как исходной, так и двойственной задачи являются неравенства, причем переменные не могут быть отрицательными. Мы покажем, что теорема двойственности справедлива и для симметричных двойственных задач. Это будет сделано путем преобразования их к эквивалентной паре несимметричных двойственных задач.

## § 2. Симметричные двойственные задачи

Исходная задача. Найти вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , минимизирующий линейную функцию

$$f = cX \tag{2.1}$$

при условиях

$$AX \geq b \tag{2.2}$$

и

$$X \geq 0. \tag{2.3}$$



Двойственная задача. Найти вектор  $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ , максимизирующий линейную функцию

$$g = Wb \quad (2.4)$$

при условиях

$$WA \leq c \quad (2.5)$$

и

$$W \geq 0. \quad (2.6)$$

Покажем теперь, что теорема двойственности из § 1 справедлива также и для симметричных двойственных задач.

Преобразуем условия (2.2) исходной задачи с помощью неотрицательных компонент вектора  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  в систему равенств. Матричная запись эквивалентной задачи линейного программирования имеет следующий вид:

Минимизировать

$$f = (c|\bar{0}) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

при условиях

$$(A|I) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = b \quad (2.8)$$

и

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0. \quad (2.9)$$

Здесь  $\bar{0}$  —  $m$ -мерный нулевой вектор,  $I$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Двойственная задача по отношению к преобразованной исходной заключается в нахождении вектора  $W$ , максимизирующего

$$g = Wb \quad (2.10)$$

при условиях

$$W(A|I) \leq (c|\bar{0}). \quad (2.11)$$

Очевидно, что неравенство (2.11) расщепляется на неравенства (2.5) и (2.6), т. е.  $WA \leq c$  и  $-WI \leq \bar{0}$ . Последнее неравенство равнозначно условию  $W \geq 0$ .

Таким образом, исследуемые симметричные двойственные проблемы преобразованы в эквивалентные несимметричные, для которых теорема двойственности уже доказана.

Как указывалось Голдманом и Таккером [51], симметричные двойственные задачи удобно представлять с помощью следующей таблицы:

$(\geq 0)$	$x_1 \dots x_j \dots x_n$	$\geq$
$w_1$	$a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$	$b_1$
$w_i$	$a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in}$	$b_i$
$w_m$	$a_{m1} \dots a_{mj} \dots a_{mn}$	$b_m$
$\leq$	$c_1 \dots c_j \dots c_n$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">max</div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">min</div> </div>

Условия исходной задачи получаются путем скалярного умножения строк матрицы  $A$  на строку  $x$ ; скалярные произведения столбцов  $A$  на столбец  $w$  дают условия двойственной задачи.

Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде либо симметричных исходных, либо симметричных двойственных задач. Обычно неравенства в условиях задачи путем введения дополнительных неотрицательных переменных преобразуют в равенства. Дополнительные переменные вводятся в симметричную исходную задачу со знаком минус, тогда как при симметричности двойственной задачи они входят со знаком плюс. Коэффициенты линейной формы, связанные с этими переменными, принимаются равными нулю. Результирующая таблица для исходной задачи содержит отрицательную единичную матрицу. Результирующая таблица двойственной задачи содержит положительную единичную матрицу. Следовательно, завершающая симплексная таблица одной из этих задач будет содержать также оптимальный план другой задачи.

Поскольку условия исходной задачи содержат единичную матрицу, взятую со знаком минус, компоненты решения двойственной задачи совпадают с соответствующими величинами  $z_j$  окончательной таблицы, взятыми с обратным знаком.

Так как объем задачи, решаемой с помощью электронной вычислительной машины, обычно лимитируется числом включаемых строк, то для практики важно, что слишком большая в исходной постановке задача может принять при-

емлемые размеры в двойственной формулировке и наоборот. Как при решении исходной, так и при решении двойственной задачи заключительная таблица содержит решение исходной задачи.

С помощью симметричных двойственных соотношений общую проблему линейного программирования можно свести к задаче, связанной с решением системы неравенств в неотрицательных переменных. Вектор  $X$ , удовлетворяющий ограничениям

$$AX \geq b, \quad WA \leq c, \quad Wb \geq cX, \quad X \geq 0, \quad W \geq 0,$$

является оптимальным планом задачи минимизации

$$cX$$

при условиях

$$\begin{aligned} AX &\geq b, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Исследуем вкратце экономическую интерпретацию задачи планирования производства, упомянутой в § 2 гл. 1, и двойственной ей задачи \*). Исходная задача заключается в максимизации

$$cX$$

при условиях

$$\begin{aligned} AX &\leq b, \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

где  $a_{ij}$  соответствует числу единиц  $i$ -го ресурса, требуемого для производства одной единицы  $j$ -го вида продукции,  $b_i$  равно запасу  $i$ -го ресурса, а  $c_j$  — величина дохода, приходящегося на единицу  $j$ -го вида продукции. Соответствующая двойственная задача состоит в минимизации

$$Wb$$

при условиях

$$\begin{aligned} WA &\geq c, \\ W &\geq 0. \end{aligned}$$

---

\*) См. работы Аллена [2], Дорфмана [39], Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [40], Гаррисона [53] и Таккера [95]. Интерпретация задач двойственной пары (и линейного программирования вообще) в терминах классических множителей Лагранжа дана в работе Таккера [96].

В то время как физическая интерпретация исходной задачи ясна, смысл двойственной задачи не столь очевиден. Возникает вопрос, как интерпретировать линейную форму и условия двойственной задачи. Лучше всего на этот вопрос можно ответить с помощью формулировки исходной и двойственной задач в терминах размерностей (Гаррисон [53]).

Исходная задача заключается в максимизации

$$\sum_{j=1}^n \left( \begin{array}{c} \text{доход от единицы} \\ \text{продукции } j\text{-го вида} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{количество единиц} \\ \text{продукции } j\text{-го вида} \end{array} \right) = \text{доход}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \left( \begin{array}{c} \text{затраты } i\text{-го ресурса} \\ \text{на производство} \\ \text{единицы продукции} \\ \text{\scriptsize } j\text{-го вида} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{количество единиц} \\ \text{продукции} \\ \text{\scriptsize } j\text{-го вида} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{c} \text{запас} \\ \text{\scriptsize } i\text{-го ресурса} \end{array} \right);$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Двойственная задача сводится к минимизации

$$\sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{c} \text{запас} \\ \text{\scriptsize } i\text{-го ресурса} \end{array} \right) w_i = (?)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{c} \text{затраты } i\text{-го ресурса} \\ \text{на производство} \\ \text{продукции } j\text{-го вида} \end{array} \right) w_i \geq \left( \begin{array}{c} \text{доход от продукции} \\ \text{\scriptsize } j\text{-го вида} \end{array} \right),$$

$$w_i \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно, что размерности условий двойственной задачи будут совпадать, если  $w_i$  совпадет со стоимостью единицы  $i$ -го ресурса. Двойственная задача тогда состоит в минимизации

$$\sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{c} \text{запас} \\ \text{\scriptsize } i\text{-го ресурса} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{стоимость единицы} \\ \text{\scriptsize } i\text{-го ресурса} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{общая стоимость} \\ \text{\scriptsize всех ресурсов} \end{array} \right)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{l} \text{затраты } i\text{-го ресурса} \\ \text{на производство} \\ \text{продукции } j\text{-го вида} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{стоимость единицы} \\ i\text{-го ресурса} \end{array} \right) \geq \left( \begin{array}{l} \text{доход от про-} \\ \text{дукции } j\text{-го вида} \end{array} \right);$$

$$j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{стоимость единицы} \\ i\text{-го ресурса} \end{array} \right) \geq 0.$$

Таким образом, задачи двойственной пары могут быть сформулированы следующим образом:

Исходная задача. Сколько единиц  $x_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$  каждого вида продукции нужно выпустить при данном доходе  $c_j$  от единицы продукции  $j$ -го вида и данном предельном потреблении каждого из имеющихся ресурсов  $b_i$  при  $i = 1, 2, \dots, m$ , чтобы получить от всего производства максимальную прибыль?

Двойственная задача. Какую цену  $w_i$  следует назначить единице каждого из ресурсов, чтобы при заданных количествах ресурсов  $b_i$  и заданных величинах дохода  $c_j$  от производства каждого вида продукции минимизировать общую стоимость затрат?

Переменные  $w_i$  именуются в различных источниках по-разному. Например, они называются *учетными, неявными* или *фиктивными ценами*.

Допустим, что при помощи симплексного метода определено решение задачи планирования производства. Поскольку линейная форма максимизировалась, все входящие и не входящие в базис векторы имеют соответствующие разности  $z_j - c_j \geq 0$ . Вследствие некоторых внешних условий, например правительственного регулирования производства или рыночной конъюнктуры, задача может обусловить, что производство  $k$ -го вида продукции ( $x_k$ ) должно быть в заключительном решении положительным. Однако оптимальный базис может не включать вектора  $P_k$ . Мы должны тогда изменить наш оптимальный план, введя в его базис вектор  $P_k$  и отказавшись от производства какого-либо другого вида продукции. Если предположить, что решение задачи единственно, то  $z_k - c_k > 0$  и введение в базис вектора  $P_k$  уменьшает максимальное значение линейной формы на вели-

чину  $(z_k - c_k)\theta$ . Эта величина совпадает с убытком предпринимателя под влиянием внешних условий. Величина  $z_k - c_k$  равна чистой стоимости производства единицы  $k$ -го вида продукции, где  $z_k$  — косвенная стоимость единицы  $k$ -го вида продукции, а  $c_k$  — ее прямая стоимость. Проанализировав симплексную таблицу оптимального плана задачи планирования производства, можно получить соотношение между чистыми стоимостями и учетными ценами факторов производства. Система косвенных стоимостей, т. е. элементов  $z_j - c_j$ , соответствующих дополнительным переменным, совпадает с системой учетных цен, решающей двойственную задачу\*). Если все дополнительные переменные входят в окончательный базис, то не производится никакой продукции, не используется никаких средств и максимальный доход равен нулю. Применительно к двойственной задаче это означает, что минимальная величина всех затраченных средств также равна нулю. Это следует из равенства нулю всех косвенных стоимостей, соответствующих дополнительным переменным\*\*). Если решение исходной задачи не включает в себя никаких дополнительных переменных, принимающих положительные значения, исходная задача приводит к оптимальному доходу при использовании всех имеющихся ресурсов. В этом случае ни одна из косвенных стоимостей, соответствующих дополнительным векторам, не равна нулю, минимальное значение общих затрат положительно и равно максимальному доходу.

В заключение этого параграфа, посвященного симметричным двойственным задачам, дадим формулировку следующей теоремы Данцига и Ордена [31а]:

*Всякий раз, когда  $i$ -е соотношение системы (2.2) или (2.5) обращается при подстановке оптимального плана в строгое неравенство,  $i$ -я компонента решения двойственной задачи обращается в нуль.*

*Обратно, если  $i$ -я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна,  $i$ -е соотношение исходной задачи удовлетворяется ее решением как строгое равенство.*

---

\*) Для дополнительных переменных  $c_j = 0$ , поэтому  $z_j - c_j = z_j$ , совпадает с косвенной стоимостью. (Прим. ред.)

\*\*) Вектору базиса всегда соответствует  $z_j - c_j = 0$ .

## У п р а ж н е н и я

1. Записать исходную задачу для следующей симметричной двойственной проблемы:

Максимизировать

$$w_1 + w_2 + w_3$$

при условиях

$$2w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 2,$$

$$4w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 2,$$

$$w_1 \geq 0,$$

$$w_2 \geq 0,$$

$$w_3 \geq 0.$$

Решить обе задачи симплексным методом.

2. Решить следующую задачу симплексным методом:

Минимизировать

$$2x_1 - 3x_2$$

при условиях

$$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$x_3 \geq 0.$$

3. Выписать двойственную задачу к задаче упражнения 2 и решить ее графически.

4. Изобразить графически условия следующей задачи и задачи, ей двойственной:

Минимизировать

$$x_1 - x_2$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$-x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

5. Доказать заключительную теорему § 2.

## ГЛАВА 6

### МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

#### § 1. Использование обычной формы обратной матрицы

Анализ симплексного метода (гл. 3 и гл. 4) показывает, что основным момент, позволяющий осуществлять переход от одного опорного плана к другому, состоит в разложении каждого из векторов, не входящих в базис, по векторам этого базиса. Имея такое разложение, можно сделать следующее:

1. Подсчитать величины  $z_j - c_j$ , определяющие, какой из векторов следует ввести в базис, или указывающие на оптимальность рассматриваемого плана.

2. Определить, какой вектор подлежит исключению из базиса.

3. Преобразовать базис и получить новый опорный план.

В § 5 гл. 2 было показано, что при заданном базисе  $B$ , состоящем из  $m$ -мерных векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , коэффициенты разложения произвольного вектора  $P_j$  по векторам  $B$  определяются по формуле

$$X_j = B^{-1}P_j, \quad (1.1)$$

где  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  — вектор-столбец, компонентами которого являются искомые коэффициенты. Таким образом,

$$P_j = x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \dots + x_{mj}P_m.$$

Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заключающуюся в минимизации

$$cX$$



при условиях

$$AX = b$$

и

$$X \geq 0.$$

Если допустить, что матрица  $B$ , соответствующая первым  $m$  векторам  $A$ , такова, что

$$BX_0 = b,$$

$$X_0 \geq 0,$$

где  $X_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , то опорный план выражается в виде

$$X_0 = B^{-1}b. \quad (1.2)$$

Разложения векторов, составляющих матрицу  $A$ , по векторам базиса  $B$  определяются формулой (1.1) для  $j = 1, 2, \dots, n$ .

В § 1 гл. 4 для базиса любого опорного плана были определены величины

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj} \quad (1.3)$$

для  $j = 1, 2, \dots, n$ , где  $c_i$  — коэффициент линейной формы. С помощью (1.1) равенство (1.3) может быть переписано в виде

$$z_j = c_0 X_j = c_0 B^{-1} P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

где  $c_0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  — вектор-строка. Следовательно, задавшись для базиса  $B$  некоторого плана вектором-строкой

$$c_0 B^{-1},$$

можно подсчитать соответствующее  $z_j$ . Из соотношений (1.1), (1.2) и (1.4) следует, что данные, необходимые для перехода от одного опорного плана к другому, могут быть получены, если известны для каждого базиса  $B$  обратная матрица  $B^{-1}$  и условия задачи, состоящие из матрицы  $A$  и векторов  $b, c$ . Эти соображения послужили основанием для построения так называемого *модифицированного симплексного метода*, являющегося некоторым усовершенствованием обычного симплексного процесса (Данциг, Орден и Вольф [32] и Данциг [20], [21]).

Основная разница между обычным симплексным методом и модифицированным процессом заключается в том, что

в первом мы преобразуем все элементы симплексной таблицы по формулам полного исключения, тогда как во втором случае нам необходимо преобразовать по тем же самым формулам лишь элементы обратной матрицы.

Поэтому модифицированный симплексный метод, и особенно его видоизменение, в котором используется мультипликативная форма обратной матрицы, применяется при решении задач на быстродействующих вычислительных машинах \*). Это связано со следующими двумя обстоятельствами.

1. Для задач, матрица коэффициентов которых содержит большое число нулевых элементов, общее число вычислений \*\*) уменьшается. В модифицированном процессе мы всегда имеем дело с коэффициентами матрицы условий  $A$ , и поэтому вычислительная схема может быть составлена так, что умножению подлежат лишь ненулевые элементы  $A$ , благодаря чему общий объем вычислений существенно сокращается. При этом ненулевые элементы матрицы условий  $A$  можно компактно разместить в запоминающем устройстве вычислительной машины. Отметим, что в обычном симплексном методе нулевые элементы в процессе вычислений преобразуются, вообще говоря, в ненулевые. В общем случае модифицированный симплексный метод связан с меньшим числом вычислений по сравнению с обычным \*\*\*).

2. Объем текущей информации, запоминаемой машиной, при использовании модифицированного симплексного метода, вообще говоря, сокращается, так как в этом случае машина должна запоминать лишь обратную матрицу и вектор, отвечающий опорному плану, тогда как при обычном симплексном методе фиксации подлежат вся симплексная таблица. Использование мультипликативной формы обратной матрицы еще более сокращает объем запоминаемой информации.

Прежде чем перейти к рассмотрению вычислительной схемы модифицированного процесса, покажем, как с помощью формул

\*) См. работу Данцига и Орчард-Хейса [29] и § 2 этой главы.

\*\*) Проблемами подобного типа являются задача поставщика, задача планирования производства и межпромышленная задача, описанные в гл. II, а также многие другие аналогичные задачи.

\*\*\*) Вагнер [99] дал полное сравнение обычного и модифицированного симплексного методов, показав, что при  $n > 3m$  модифицированный симплексный метод связан с меньшим числом вычислений.

исключения переходить от одного обращенного базиса к другому \*).

Рассмотрим новый базис  $\bar{B} = (P_1 P_2 \dots P_l \dots P_m)$ , который отличается от старого базиса  $B$  тем, что вектор  $P_l$  заменен на вектор  $P_k$ . Имеем тогда

$$B^{-1}B = B^{-1}(P_1 P_2 \dots P_l \dots P_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

и из (1.1)

$$B^{-1}\bar{B} = B^{-1}(P_1 P_2 \dots P_k \dots P_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & x_{1k} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{lk} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{mk} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5a)$$

Если через  $b_{ij}$  обозначить элемент матрицы  $B^{-1}$ , расположенный на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, а через  $\bar{b}_{ij}$  — соответствующий элемент  $\bar{B}^{-1}$ , то  $\bar{b}_{ij}$  можно определить с помощью формул исключения

$$\begin{aligned} \bar{b}_{ij} &= b_{ij} - \frac{b_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} \quad \text{для } i \neq l, \\ \bar{b}_{lj} &= \frac{b_{lj}}{x_{lk}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Справедливость этого преобразования может быть проверена прямым умножением  $\bar{B}^{-1}\bar{B}$ , в результате которого получается единичная матрица. Например, скалярное произведение первой строки  $\bar{B}^{-1}$  на первый столбец  $\bar{B}$  равно \*\*)

$$\left(b_{11} - \frac{b_{l1}}{x_{lk}} x_{1k}\right) a_{11} + \left(b_{12} - \frac{b_{l2}}{x_{lk}} x_{1k}\right) a_{21} + \dots \\ \dots + \left(b_{1m} - \frac{b_{lm}}{x_{lk}} x_{1k}\right) a_{m1}$$

\*) Под обращенным базисом понимается матрица, обратная матрице, составленной из векторов базиса. (Прим. ред.)

\*\*) Это произведение получается по правилу умножения матриц, рассмотренному в § 1 гл. 2.







щие при подстановке в них вектора  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который не удовлетворяет всем условиям (1.9).

Из (1.11) и (1.13) получаем

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} + x_{n+m+2} = 0.$$

Поэтому  $x_{n+m+2}$  есть сумма невязок, взятая со знаком минус. Поскольку  $x_{n+i} \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ , величина  $x_{n+m+2}$  не может быть положительной.

Как следует из соотношений (1.12) — (1.14), расширенная задача состоит из  $(m+2)$  уравнений с  $(n+m+2)$  переменными. В этой задаче опорный план должен содержать  $(m+2)$  переменных из системы  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+m+1}, x_{n+m+2})$ . Знаки двух последних переменных не оговариваются, и эти переменные всегда входят в план. Если в оптимальном плане расширенной задачи переменные  $x_{n+i}$  при  $i = 1, 2, \dots, m$  равны 0, величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$  составляют оптимальный план задачи (1.8) — (1.10) при значении линейной формы, равном  $x_{n+m+1}$ . Этот план является также оптимальным для задачи (1.8a) — (1.10a), причем соответствующее значение линейной формы равно  $-x_{n+m+1} = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ .

Вычислительный процесс для расширенной задачи начинают с опорного плана, включающего  $m$  дополнительных переменных  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  и переменные  $x_{n+m+1}$  и  $x_{n+m+2}$ . Для отыскания первого опорного плана \*) необходимо применить этап I процесса, где задача о максимизации  $x_{n+m+2}$  при условиях (1.13) и (1.14) решается без всяких ограничений на знаки переменных  $x_{n+m+1}$  и  $x_{n+m+2}$ . Если максимальное значение  $x_{n+m+2}$  оказывается равным нулю, то все  $x_{n+i}$  для  $i = 1, 2, \dots, m$  также должны быть равны нулю, и переменные  $x_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ , входящие в полученный оптимальный план, представляют опорный план для задач (1.8) — (1.10) и (1.8a) — (1.10a). Если максимум  $x_{n+m+2}$  меньше нуля, то из этого вытекает, что по меньшей мере одна из дополнительных переменных в решении этапа I не равна нулю, и, следовательно, исходная задача не имеет ни одного плана. В первом случае осуществляется переход к этапу II, на котором максимизируется  $x_{n+m+1}$  при условиях (1.13) и (1.14). При этом  $x_{n+m+2}$  полагается, естественно, равным

\*) Речь идет о плане исходной задачи (1.8) — (1.10). (Прим. ред.)

нулю. Окончательным результатом этапа II является искомым оптимальный план.

Опишем теперь вычислительный процесс для расширенной задачи, начинающийся с полного искусственного базиса. В вычислительной таблице процесса нам необходимо вести регистрацию только следующих данных: компонент плана, номеров векторов, образующих текущий базис плана, и матрицы, обратной этому базису. Для получения нового плана необходимо вычислить величины  $z_j$ . Это можно сделать с помощью формулы (1.4), в которой под  $B$  понимается текущий базис. Тогда можно определить, какой вектор  $P_j$  следует ввести в базис, и подсчитать по формуле (1.1) коэффициенты его разложения по векторам базиса.

Затем, используя метод, изложенный в гл. 4, определим, какой вектор следует исключить из базиса. После этого преобразуем по формулам исключения матрицу, обратную текущему базису. Из коэффициентов системы условий (1.13) составим матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,k} & \dots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \dots & a_{m+2,k} & \dots & a_{m+2,n} \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $j$ -й вектор-столбец матрицы  $\bar{A}$  через  $\bar{A}_j$ . Сравним матрицу  $\bar{A}$  с исходной таблицей вычислений по методу искусственного базиса для обычного симплексного процесса (см. табл. 4 гл. 4). Очевидно, что матрица, образованная из строк 1, 2, ...,  $m$ ,  $m+1$ ,  $m+2$  и столбцов  $P_1, P_2, \dots, P_n$  таблицы, совпадает с матрицей  $\bar{A}$ , за исключением того, что  $(m+1)$ -я и  $(m+2)$ -я строки матрицы  $\bar{A}$  равны соответствующим строкам таблицы, взятым со знаком минус. Как и в обычном методе, для подсчета разностей  $z_j - c_j$  при наличии в плане искусственных переменных используется



$(m+2)$ -я строка, а в случае их исключения —  $(m+1)$ -я строка.

Поскольку исходный базис модифицированного процесса состоит из единичных векторов, матрица, ей обратная, будет также единичной, что отражено в следующей матрице порядка  $(m+2)$ :

$$U = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Первые  $m$  строк и  $m$  столбцов матрицы  $U$  совпадают с обращенным начальным базисом  $B$ . Две последние строки  $U$  используются для определения вектора, подлежащего вводу в базис, причем на этапе I данные берутся из  $(m+2)$ -й строки, а на этапе II — из  $(m+1)$ -й. Примем матрицу  $U$  за исходную вычислительную таблицу и преобразуем ее элементы описанным ранее способом. Обозначим через  $u_{ij}$  элементы матрицы  $U$  и через векторы-строки  $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i, m+2})$  — строки этой матрицы. Для удобства описания вычислительного процесса примем, что через  $U_i$  обозначена как первоначальная, так и преобразованная  $i$ -я строка матрицы  $U$ . Матрица  $U$  является обратной по отношению к матрице порядка  $(m+2)$ , столбцами которой являются векторы из условий (1.13). Расположим матрицу  $U$  и исходный план  $x_{n+i} = b_i$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $x_{n+m+1} = 0$  и  $x_{n+m+2} = b_{m+2}$ , как показано в исходной части таблицы 6. Этапы состоят из следующих шагов:

Этап I. План содержит положительные искусственные переменные.

Шаг 1. Если  $x_{m+n+2} < 0$ , подсчитываем

$$\delta_j = U_{m+2} \bar{A}_j = u_{m+2,1} a_{1j} + u_{m+2,2} a_{2j} + \dots + u_{m+2, m+2} a_{m+2,j},$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

и переходим к шагу 2.

Таблица 6

Номер строки в таблице	Номер компоненты плана	Значения компонент	Матрица $U$	
			Обращенный базис $B^{-1}$	$U_i \bar{A}_k$ ( $B^{-1} P_k$ )
				$U_{m+1} \bar{A}_k$ $U_{m+2} \bar{A}_k$

Исходная таблица

1	$n+1$	$x_{n+1} = b_1$	1 ... 0 ... 0	0 0	$x_{1k}$
2	$n+2$	$x_{n+2} = b_2$	0 ... 0 ... 0	0 0	$x_{2k}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$l$	$n+l$	$x_{n+l} = b_l$	0 ... 1 ... 0	0 0	$x_{lk}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$m$	$n+m$	$x_{n+m} = b_m$	0 ... 0 ... 1	0 0	$x_{mk}$
$m+1$	$n+m+1$	$x_{n+m+1} = 0$	0 ... 0 ... 0	1 0	$x_{m+1,k}$
$m+2$	$n+m+2$	$x_{n+m+2} = b_{m+2}$	0 ... 0 ... 0	0 1	$x_{m+2,k}$

Преобразованная таблица

1	$n+1$	$x'_{n+1}$	$u'_{11} \dots u'_{1l} \dots u'_{1m}$	0 0	
2	$n+2$	$x'_{n+2}$	$u'_{21} \dots u'_{2l} \dots u'_{2m}$	0 0	
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$l$	$k$	$x'_k$	$u'_{l1} \dots u'_{ll} \dots u'_{lm}$	0 0	
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$m$	$n+m$	$x'_{n+m}$	$u'_{m1} \dots u'_{ml} \dots u'_{mm}$	0 0	
$m+1$	$n+m+1$	$x'_{n+m+1}$	$u'_{m+1,1} \dots u'_{m+1,l} \dots u'_{m+1,m}$	1 0	
$m+2$	$n+m+2$	$x'_{n+m+2}$	$u'_{m+2,1} \dots u'_{m+2,l} \dots u'_{m+2,m}$	0 1	

Если  $x_{n+m+2} = 0$ , переходим к шагу 1 этапа II.

*Шаг 2.* Если все  $\delta_j \geq 0$ , то  $x_{n+m+2}$  является максимумом и, следовательно, задача (1.8) — (1.10) не имеет ни одного плана.

Если по крайней мере одна из  $\delta_j < 0$ , то индекс переменной  $x_k$ , которая подлежит вводу в план, определяется формулой

$$\delta_k = \min \delta_j.$$

Если минимум достигается более чем на одном из  $\delta_j$ , выбор  $\delta_k$  осуществляется по наименьшему индексу.

*Шаг 3.* Подсчитываем

$$x_{ik} = U_i A_k = u_{i1} a_{1k} + u_{i2} a_{2k} + \dots + u_{i, m+2} a_{m+2, k}$$

для

$$i = 1, 2, \dots, m, m+1, m+2.$$

Переменная  $x_l$ , которую надлежит исключить из плана, определяется величиной

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}},$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

минимум берется только для

$$x_{ik} > 0.$$

Если минимум достигается на нескольких значениях  $i$ , выбираем  $l$ , соответствующее наименьшему индексу \*). (Для упрощения изложения мы рассматриваем отношения  $\frac{x_i}{x_{ik}}$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ . В действительности эти отношения берутся для  $i$ , совпадающих с индексами векторов текущего базиса.)

---

\*) В этом случае новый план окажется вырожденным. Теоретические и вычислительные правила для случая вырожденности, рассмотренные Данцигом [19], излагаются в гл. 7. Отметим, что авторы модифицированного процесса не включили этих правил в вычислительные схемы, разработанные в их исследовательском центре (Орчард-Хейс [82]).

*Шаг 4.* Новые значения переменных в опорном плане определяются по формулам

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} \quad \text{для } i \neq k,$$

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}.$$

Новые элементы матрицы  $U$  преобразуются по формулам

$$u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad \text{для } i \neq l,$$

$$u'_{lj} = \frac{u_{lj}}{x_{lk}}.$$

При указанном преобразовании  $(m+1)$ -й и  $(m+2)$ -й столбцы  $U$  не меняются. Единичные векторы этих столбцов дают нам возможность прибавлять значения  $c_j$  при подсчете разностей  $z_j - c_j$ . Шаги этапа I повторяются до тех пор, пока либо не обнаружится отсутствие планов у исследуемой задачи, либо значение  $x_{n+m+2}$  не станет равным нулю. В последнем случае осуществляется переход к этапу II.

*Этап II.* Искусственные переменные плана  $x_{n+i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , равны нулю.

*Шаг 1.* Здесь  $x_{n+m+2} = 0$ . Подсчитываем

$$\gamma_j = U_{m+1} \bar{A}_j = u_{m+1,1} a_{1j} + u_{m+1,2} a_{2j} + \dots + u_{m+1,m+2} a_{m+1,j}, \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

*Шаг 2.* Если все  $\gamma_j \geq 0$ , то  $x_{n+m+1}$  достигают своей максимальной величины и соответствующий опорный план является оптимальным. Величина  $x_{n+m+1}$ , взятая со знаком минус, совпадает с минимальным значением линейной формы исходной задачи.

Если по крайней мере одно из  $\gamma_j < 0$ , необходим переход к новому базису. Пусть

$$\gamma_k = \min_j \gamma_j.$$

Тогда переменную  $x_k$  следует ввести в новый план. Как и прежде, если минимум достигается одновременно на нескольких индексах, предпочтение отдается наименьшему из них.

*Шаг 3.* Подсчитываются

$$x_{ik} = U_i \bar{A}_k = u_{i1}a_{1k} + u_{i2}a_{2k} + \dots + u_{i,m+2}a_{m+2,k}$$

для

$$i = 1, 2, \dots, m, m+1, m+2.$$

Переменная  $x_k$ , подлежащая исключению из старого плана, определяется из соотношения

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где минимум берется по положительным  $x_{ik}$ . Полагая

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

мы несколько не ограничиваем общности рассуждений (см. шаг 3 этапа 1). Заметим, что неоднозначность индекса, на котором достигается минимум, устраняется обычным приемом.

Если все  $x_{ik} < 0$ , линейная форма задачи не ограничена сверху.

*Шаг 4.* Новые значения переменных определяются соотношениями

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} \quad \text{для } i \neq k,$$

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}.$$

Элементы матрицы  $U$  преобразуются по формулам

$$u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad \text{для } i \neq l,$$

$$u'_{lj} = \frac{u_{lj}}{x_{lk}}.$$

Шаги повторяются до тех пор, пока либо не будет определен оптимальный план, либо не будет установлена неограниченность линейной формы задачи.

Все описанные операции сводятся в таблицу 6. В ее крайний правый столбец помещаются значения коэффициентов

разложения вектора, вводимого в новый базис, по векторам старого базиса.

Обратная матрица  $U$  состоит из  $(m+2)$  строк и  $(m+2)$  столбцов таблицы, выделенных жирными линиями. Как уже ранее упоминалось, последние два столбца таблицы 6 при преобразованиях не меняются. Матрица обращенного  $m$ -мерного базиса ограничена в обеих частях таблицы жирными и пунктирными линиями.

Если исходная задача содержит единичные векторы, то в случае равенства нулю соответствующих им коэффициентов линейной формы эти векторы можно использовать в первоначальном базисе модифицированного процесса (пример чему служат дополнительные векторы). При этом формулы (1.11) следует переписать в виде

$$a_{m+2,j} = - \sum_{i \neq B} a_{ij} \quad (1.15)$$

и

$$b_{m+2,j} = - \sum_{i \neq B} b_i, \quad (1.16)$$

где  $i \neq B$  обозначает систему индексов строк, которые по-прежнему требуют введения искусственных векторов. Если, в частности, исходная задача обладает  $m$  различными единичными векторами, то  $b_{m+2} = 0$  и процесс начинается с этапа II.

Чтобы показать особенности модифицированного процесса и сравнить его с обычным симплексным методом, решим с помощью этого процесса пример из § 3 гл. 4.

**Пример.** Максимизировать

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

и

$$x_j \geq 0.$$

Здесь  $m = 3$  и  $n = 4$ . Линейная форма соответствующей задачи минимизации равна

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4.$$

Сформулируем пример применительно к модифицированному процессу с полным искусственным базисом:

Максимизировать  $x_8$  при условиях

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & + x_5 & = & 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & + x_6 & = & 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & + x_7 & = & 10, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 & + x_8 & = & 0, \\ -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - x_4 & + x_9 & = & -45. \end{array}$$

Коэффициенты при первых четырех переменных в четвертой строке совпадают с соответствующими величинами  $c_j$ . Коэффициенты при переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  пятого уравнения и правая часть этого уравнения получены по формулам (1.11).

Матрицей  $\bar{A}$  в примере является

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -9 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрицей  $U$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вся последовательность вычислений представлена в таблице 7.

Т а б л и ц а 7

Номер строк таблицы	Номер пере- менной плана	Значение пе- ременной	Матрица $U$			$x_{ik}$
------------------------	-----------------------------	--------------------------	-------------	--	--	----------

Начальная таблица

1	5	15	1	0	0	0 0	3
2	6	20	0	1	0	0 0	5
3	7	10	0	0	1	0 0	1
4	8	0	0	0	0	1 0	-3
5	9	-45	0	0	0	0 1	-9

Вторая итерация

1	5	3	1	-3/5	0	0 0	7/5
2	3	4	0	1/5	0	0 0	1/5
3	7	6	0	-1/5	1	0 0	9/5
4	8	+12	0	3/5	0	1 0	-7/5
5	9	-9	0	9/5	0	0 1	-16/5

Третья итерация

1	2	15/7	5/7	-3/7	0	0 0	-1/7
2	3	25/7	-1/7	2/7	0	0 0	3/7
3	7	15/7	-9/7	4/7	1	0 0	6/7
4	8	-15	1	0	0	1 0	0
5	9	-15/7	16/7	3/7	0	0 1	-6/7

Четвертая итерация

1	2	5/2	1/2	-1/3	1/6	0 0	
2	3	5/2	1/2	0	-3/6	0 0	
3	1	5/2	-9/6	4/6	7/6	0 0	
4	8	-15	-1	0	0	1 0	
5	9	0	1	1	1	0 1	

Э т а п I

$$\delta_k = \delta_3 = \\ = U_{m+2} \bar{A}_3 = -9,$$

$$\theta_0 = \frac{x_6}{x_{63}} = \frac{20}{5} = 4;$$

$$\delta_k = \delta_2 = \\ = U_{m+2} \bar{A}_2 = \\ = \frac{16}{5},$$

$$\theta_0 = \frac{x_5}{x_{52}} = \frac{15}{7};$$

$$\delta_k = \delta_1 = \\ = U_{m+2} \bar{A}_1 = -\frac{6}{7},$$

$$\theta_0 = \frac{x_7}{x_{71}} = \frac{15}{6}.$$

Э т а п II

$$x_9 = 0, \text{ все } \gamma_i \geq 0.$$

Оптимальный  
план:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \\ = \frac{5}{2}, \quad x_4 = 0.$$

Значение линей-  
ной формы:  
 $x_8 = 15.$



## § 2. Использование мультипликативного представления обратной матрицы

В § 1 были выведены формулы (1.6), дающие возможность вычислять матрицу, обратную базису  $\bar{B}$ , который отличается от базиса  $B$  с известной обратной матрицей  $B^{-1}$  лишь одним вектором. Используя обозначения § 1, имеем:

$$\begin{aligned} B &= (P_1 P_2 \dots P_l \dots P_m), \\ \bar{B} &= (P_1 P_2 \dots P_k \dots P_m), \\ B^{-1} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ll} & \dots & b_{lm} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}, \\ B^{-1}P_k &= X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{lk} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix}, \\ \bar{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \dots & \bar{b}_{1l} & \dots & \bar{b}_{1m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{b}_{l1} & \bar{b}_{l2} & \dots & \bar{b}_{ll} & \dots & \bar{b}_{lm} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{b}_{m1} & \bar{b}_{m2} & \dots & \bar{b}_{ml} & \dots & \bar{b}_{mm} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b}_{ij} &= b_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} b_{lj} \quad \text{для } i \neq l, \\ \bar{b}_{lj} &= b_{lj} \frac{1}{x_{lk}}. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу

$$E^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{x_{1k}}{x_{lk}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{x_{2k}}{x_{lk}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_{lk}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{x_{mk}}{x_{lk}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $E^l$ , называемая обычно *элементарной*, совпадает, за исключением  $l$ -го столбца (*особый столбец*), с единичной матрицей. Читатель может легко проверить прямым умножением, что произведение матриц

$$E^l B^{-1} = \bar{B}^{-1}.$$

Следовательно, умножение  $B^{-1}$  на  $E^l$  слева эквивалентно применению формул (1.6). Как и в (1.6), это преобразование можно проделать, зная лишь  $X_k$  и  $B^{-1}$ .

Если принять

$$y_{il} = -\frac{x_{ik}}{x_{lk}} \text{ для } i \neq l, \quad (2.1)$$

$$y_{ll} = \frac{1}{x_{lk}}, \quad (2.2)$$

то  $E^l$  можно записать как

$$E^l = \begin{pmatrix} 1 & \dots & y_{1l} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & y_{ll} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & y_{ml} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, элементарная матрица полностью определяется индексом особого столбца  $l$  и совокупностью его элементов  $y_{il}$ . Используя сокращенную запись, положим

$$E^l = (l; y_{1l}, \dots, y_{ll}, \dots, y_{ml}).$$

В симплексном методе вычисления обычно начинаются с базиса  $B_0$ , векторы которого составляют единичную матрицу порядка  $m$ . Некоторые из этих векторов могут быть искусственными. Матрица, обратная  $B_0$ , является, разумеется, единичной; положим  $B_0^{-1} = I = E_0$ . Матрица, совпадающая с обращением следующего базиса  $B_1$ , отличающегося от  $B_0$  тем, что вектор  $P_l$  заменен вектором  $P_k$ , может быть получена умножением

$$E_1^l E_0 = B_1^{-1},$$

где  $E_1^l$  — элементарная матрица, образованная при первом изменении базиса. Вообще, задаваясь соответствующей

системой элементарных матриц, можно представить матрицу, обратную  $p$ -му базису, в форме

$$E_p^l E_{p-1}^l \dots E_1^l E_0 = B_p^{-1}.$$

Заметим, что в каждой матрице  $E_p^l$  индекс  $l$  совпадает с номером столбца, который был выведен из предыдущего базиса.

Если задана соответствующая система элементарных матриц, то для любого базиса  $B_p$  можно получить  $B_p^{-1}$  и затем использовать методику модифицированного симплексного процесса.

В рассматриваемой форме модифицированного симплексного метода, связанной с использованием мультипликативного представления обратной матрицы, вычисления начинаются с единичной матрицы  $U$  порядка  $(m+2)$ .  $U$  рассматривается как матрица, обратная матрице первоначального базиса задачи, задаваемой соотношениями (1.12) — (1.14). Связанные с ней элементарные матрицы имеют порядок  $(m+2)$ . Правила этапов I и II § 1 применяются в следующей модификации. Поскольку в первоначальной форме модифицированного процесса мы всегда точно знали обратную матрицу  $U$ , можно было сразу подсчитать на первом шаге этапа I необходимые  $\delta_j = U_{m+2} \bar{A}_j$ . В данном случае нам нужно сначала определить текущую строку  $U_{m+2}$ . Ее удобно получить по следующей формуле:

$$V_{m+2} E_p^l E_{p-1}^l \dots E_1^l = U_{m+2},$$

где  $V_{m+2} = (0, 0, \dots, 0, 1)$  —  $(m+2)$ -мерный единичный вектор. Вычисления удобно проводить, представив произведение в виде

$$\{[(V_{m+2} E_p^l) E_{p-1}^l] \dots E_1^l\}.$$

Заметим здесь, что в произведении любого вектора-строки

$$V = (v_1, \dots, v_{m+2})$$

и элементарной матрицы  $E_p^l$ , т. е. в произведении  $W = V E_p^l$ ,

компоненты можно подсчитывать по формулам

$$w_i = v_i \quad \text{для } i \neq l,$$

$$w_l = \sum_i v_i y_{il}.$$

На третьем шаге  $X_k$  лучше всего подсчитывать по формуле

$$X_k = \{E_p^l [E_{p-1}^l \dots (E_1^l \bar{A}_k)]\}.$$

Что касается вычисления этих произведений, то заметим, что компоненты произведения вектора-столбца  $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{m+2,j})$  на элементарную матрицу  $E_p^l$ , т. е.  $E_p^l A_j = D_j$ , можно подсчитать по формулам

$$d_{ij} = a_{ij} + y_{il} a_{lj} \quad \text{для } i \neq l,$$

$$d_{lj} = y_{ll} a_{lj}.$$

Новая элементарная матрица и текущий план получаются на четвертом шаге по формулам

$$x'_i = x_i + y_{il} x_l \quad \text{для } i \neq k,$$

$$x'_k = y_{lk} x_l,$$

где  $y_{il}$  и  $y_{ll}$  определяются из соотношений (2.1) и (2.2).

Описанные выше преобразования применяют и к этапу II, на котором вместо  $U_{m+2}$  подсчитывается

$$\{[(V_{m+1} E_p) E_{p-1}^l] \dots E_1^l\} = U_{m+1},$$

где  $V_{m+1} = (0, 0, \dots, 1, 0)$  —  $(m+2)$ -мерный единичный вектор. Основное преимущество использования мультипликативной формы обращенного базиса состоит в уменьшении количества информации, подлежащей запоминанию при вычислениях (именно, регистрировать необходимо лишь  $E_p^l$ ). Это особенно важно при использовании вычислительной машины с ограниченной емкостью оперативной памяти. В этом случае вместо запоминания полной обратной матрицы  $U$  после каждой итерации необходимо лишь регистрировать в сокращенной записи, что  $E_p^l = (l; y_{1l}, \dots, y_{m+2,l})_p$ . Модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы запрограммирован для наиболее современных вычислительных машин.

## З а м е ч а н и я

Материал этой главы заимствован из работ Орчарда-Хейса [81] и Данцига и Орчарда-Хейса [29]. Дополнительные сведения по вычислительным аспектам обычной формы модифицированного процесса можно почерпнуть из работы Данцига [21]; более подробно ознакомиться с вычислительным процессом, использующим мультипликативное представление обратной матрицы, можно по работе Данцига, Орчарда-Хейса и Уотерса [30].

## У п р а ж н е н и я

1. Решить пример из § 1 с помощью мультипликативного представления обратной матрицы.

2. Решить следующие задачи с помощью обеих разновидностей модифицированного процесса:

а) Максимизировать

$$5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5$$

при условиях

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 7,$$

$$x_j \geq 0.$$

б) Минимизировать

$$-x_1 + 2x_2$$

при условиях

$$5x_1 - 2x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$-3x_1 - 3x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

3. Решить графически упражнение 2б).

4. Решить следующую задачу обычным симплексным методом и с помощью двух разновидностей модифицированного процесса:

Минимизировать

$$x_1 + x_2 + x_3$$

при условиях

$$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5,$$

$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3,$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5.$$

$$x_j \geq 0.$$

## ГЛАВА 7

### ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Вырожденным опорным планом задачи линейного программирования называется такой план, в котором некоторая переменная  $x_i$  равна нулю, причем  $i$  совпадает с номером одного из векторов базиса рассматриваемого плана. Вырожденная ситуация характеризуется тем, что в разложении вектора  $P_0$  по векторам некоторого базиса  $P_1, P_2, \dots, P_m$

$$P_0 = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m$$

все коэффициенты  $x_i \geq 0$  и по крайней мере один из них равен нулю. В гл. 4 при обосновании симплексного процесса предполагалась невырожденность всех опорных планов задачи. Это допущение гарантировало уменьшение значения линейной формы после каждой итерации симплексного метода. Так как любая задача обладает лишь конечным числом базисов, то оптимальный план определяется в этом случае через конечное число итераций. Приведенное доказательство теряет силу, как только мы допустим существование вырожденных опорных планов, что является, разумеется, более близким к действительности. В случае вырожденного плана может оказаться, что  $\theta_0 = \frac{x_k}{x_{lk}} = 0$  (см. формулы (1.6) и (1.7) гл. 4). Тогда при переходе к новому опорному плану мы не изменим значения линейной формы задачи \*). Теоретически

---

\*) Следует отличать случай вырожденности плана от случая, когда значения линейной формы на нескольких опорных планах совпадают. В первом случае значение линейной формы, соответствующее новому плану, не меняется вследствие равенства нулю  $\theta_0$ . Во втором случае постоянство значения линейной формы обусловлено равенством  $z_k - c_k = 0$  для некоторого  $P_k$ , не входящего в базис. При этом не исключено, что  $\theta_0 > 0$ .

возможно выбрать последовательность базисов, приводящую к циклу, т. е. последовательность базисов, периодически выбирающихся и не удовлетворяющих критерию оптимальности. Очевидно, что в этом случае оптимальный план никогда не будет достигнут. Возможность заикливания реальна только в том случае, когда в текущем опорном плане  $x_i = 0$  более чем для одного  $i$  (см. упражнение 2 гл. 4). В случае, если  $x_i = 0$  по крайней мере для двух значений  $i$ , существует возможность появления неоднозначности при выборе вектора, подлежащего исключению из базиса при  $\theta_0 = 0$ . Отмеченная неоднозначность может иметь место и в невырожденной ситуации. Однако в этом случае  $\theta_0 > 0$  и новый план приводит к уменьшению значения линейной формы. При этом вследствие неоднозначности, имевшейся в старом плане, новый план будет вырожденным.

Приведенные выше замечания показывают, что любой способ распространения вычислительных методов на вырожденные задачи должен гарантировать единственность выбора вектора, подлежащего исключению из базиса. Было предложено несколько таких способов (Данциг [17], Чарнес [9] и Данциг, Орден и Вольф [32]). Опыт конкретных вычислений уменьшил значение этих приемов, так как до сих пор ни одна из практических задач не привела к заикливанию. Другими словами, успешное решение сотен задач не зависело от применения таких методов. По этой причине они не включаются в большинство вычислительных программ. Тем не менее следует отметить, что приемы, гарантирующие от заикливания, делают симплексный метод пригодным для доказательства многих теорем без ограничения общности (Гоффман [59]).

### § 1. Способы устранения заикливания

Геометрически вырожденная ситуация соответствует такому положению, когда вектор  $P_0$  лежит на граничной гиперплоскости или на образующей выпуклого конуса, определяемого векторами базиса задачи. Например, вектор  $P_0$  на рис. 17 можно выразить положительной комбинацией  $P_1$  и  $P_2$ , но представить этот вектор в виде неотрицательной комбинации  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  можно лишь при условии  $x_3 = 0$ . Однако, если мы сместим вектор  $P_0$  таким образом, что он будет лежать

внутри выпуклого конуса, определенного векторами  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , то соответствующий план будет уже невырожденным. Это можно проделать, взяв положительную линейную комбинацию этих векторов и прибавив ее к  $P_0$ . Однако нам желательно осуществить это таким образом, чтобы заметно не исказить исходную задачу. Поэтому необходимо выбрать

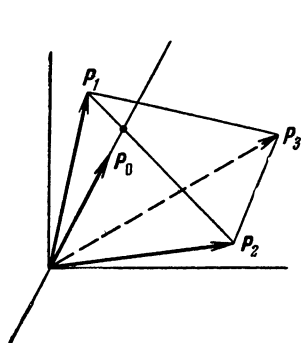


Рис. 17.

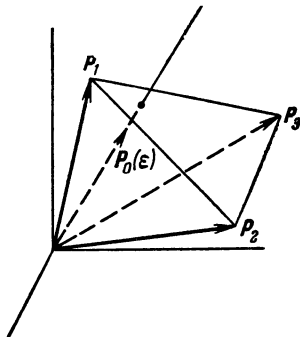


Рис. 18.

положительную комбинацию векторов  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  достаточно малой, полагая ее (см. Чарнес [9]) равной

$$\epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \epsilon^3 P_3,$$

где  $\epsilon$  — некоторое малое положительное число. Ограничения новой задачи принимают вид

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \epsilon^3 P_3 = P_0(\epsilon).$$

Геометрическая интерпретация условий представлена на рис. 18.

В общем случае необходимо таким образом изменить условия задачи, чтобы любой опорный план оказался невырожденным. Применительно к общей задаче линейного программирования перепишем ограничения

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m + \dots + x_n P_n = P_0 \quad (1.1)$$

в виде

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m + \dots + x_n P_n = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots + \epsilon^m P_m + \dots + \epsilon^n P_n = P_0(\epsilon). \quad (1.2)$$



Пусть векторы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  образуют базис  $B$ . Тогда

$$\bar{X} = B^{-1}P_0 \geq 0 \quad (1.3)$$

является планом исходной задачи и

$$\bar{X}(\epsilon) = B^{-1}P_0(\epsilon) \quad (1.4)$$

— планом измененной задачи.

Пусть

$$X_j = B^{-1}P_j. \quad (1.5)$$

Тогда соотношение (1.4) можно представить в виде

$$X(\epsilon) = B^{-1}P_0 + \epsilon B^{-1}P_1 + \epsilon^2 B^{-1}P_2 + \dots + \epsilon^m B^{-1}P_m + \dots + \\ + \epsilon^n B^{-1}P_n = \bar{X} + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots + \epsilon^m X_m + \dots + \epsilon^n X_n. \quad (1.6)$$

Заметим здесь, что, поскольку матрица  $B$  состоит из векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , то  $X_j = B^{-1}P_j$  совпадает с единичным вектором, индекс единичной компоненты которого равен  $j$  для  $j = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно,  $\bar{x}_i(\epsilon)$  определяется по формуле

$$\bar{x}_i(\epsilon) = \bar{x}_i + \sum_{j=1}^n \epsilon^j x_{ij} \quad (1.7)$$

или

$$\bar{x}_i(\epsilon) = \bar{x}_i + \epsilon^i + \sum_{j=m+1}^n \epsilon^j x_{ij}, \quad (1.8)$$

Принимая  $\epsilon > 0$  достаточно малым, можно добиться, чтобы неравенство  $\bar{x}_i(\epsilon) > 0$  выполнялось для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ . (Условия задачи всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы векторы базиса занимали первые  $m$  мест.) Для определения вектора  $P_p$ , подлежащего исключению из базиса задачи (1.2), вычисляем

$$\theta_0 = \frac{\bar{x}_l(\epsilon)}{x_{lk}} = \min_i \frac{\bar{x}_i(\epsilon)}{x_{ik}} = \frac{\bar{x}_i + \epsilon^i + \sum_{j=m+1}^n \epsilon^j x_{ij}}{x_{ik}} > 0 \quad (1.9)$$

при  $x_{ik} > 0$ . Из (1.8) следует, что минимум достигается

лишь при  $i=l$ , поскольку  $\bar{x}_l(\epsilon)$  является единственной переменной, содержащей  $\epsilon^l$ . Практически не обязательно выбирать и изменять условия задачи в соответствии с соотношениями (1.2).

Из (1.6) и (1.9) следует, что информация, необходимая для определения  $\theta_0$ , заключается в  $\bar{x}_i$  и в коэффициентах при  $\epsilon^j$ . Все эти данные содержатся в симплексной таблице исходной задачи. При достаточно малом  $\epsilon$  можно видеть, что существенными при степенях  $\epsilon$  являются первые коэффициенты, начинающиеся с  $j=1, 2, \dots, n$ .

Процесс можно тогда упорядочить следующим образом. Если  $\theta_0 = \min_i \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}}$ ,  $x_{ik} > 0$ , достигается лишь на одном индексе  $i=l$ ,  $P_l$  исключается из базиса. Если же минимум достигается на нескольких индексах  $i$ , то для всех таких индексов при  $j=1$  вычисляются отношения  $\frac{x_{ij}}{x_{ik}}$ . Затем эти отношения сравниваются. Индекс, соответствующий алгебраически наименьшему отношению, определяет вектор, подлежащий исключению. Если при подсчете минимума неоднозначность сохраняется, образуем аналогичные отношения для столбца  $j+1$  и повторяем сравнение.

Например, если для базиса  $(P_1, P_2, \dots, P_m)$

$$\theta_0 = \frac{x_{11}}{x_{1k}} = \frac{x_{21}}{x_{2k}},$$

то подсчитываем  $\frac{x_{11}}{x_{1k}}$  и  $\frac{x_{21}}{x_{2k}}$  и сравниваем результаты. Если

$$\min_i \frac{x_{i1}}{x_{ik}} = \frac{x_{21}}{x_{2k}} \quad \text{для } i=1, 2,$$

то вектор  $P_2$  подлежит исключению. Если

$$\min_i \frac{x_{i1}}{x_{ik}} = \frac{x_{11}}{x_{1k}} \quad \text{для } i=1, 2,$$

то исключают уже вектор  $P_1$ . В базис в обоих случаях вводится вектор  $P_k$ . (Выбор нового вектора не зависит от того, какой из векторов выводится из базиса.)

Если  $\frac{x_{11}}{x_{1k}} = \frac{x_{21}}{x_{2k}}$ , образуем отношения  $\frac{x_{12}}{x_{1k}}$  и  $\frac{x_{22}}{x_{2k}}$  и опять проводим сравнение до тех пор, пока не будет полу-

чено неравенство. Из (1.8) следует, что для некоторого  $j$  это обязательно случится.

После выбора  $x_{ik}$  направляющим элементом симплексная таблица преобразуется обычным образом. Новый план  $x'(\epsilon)$  для задачи (1.2) будет невырожденным при достаточно малом  $\epsilon$ . Рассмотренный процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Изложенная выше схема полностью приспособлена к обычному симплексному методу, поскольку все необходимые для нее данные содержатся в симплексных таблицах.

Применительно к модифицированному процессу можно предложить другой эффективный способ решения вырожденной задачи, требующий лишь знания обратной матрицы текущего базиса (Данциг, Орден и Вольф [32]). Мы не будем здесь подробно излагать этот метод, а сформулируем лишь правило однозначного определения вектора, выводимого из базиса. Это правило, данное Данцигом, заключается в следующем:

Если минимум достигается на двух или более индексах  $l_1, l_2, \dots$ , то соответствующие элементы первого столбца матрицы обращенного базиса делят на  $x_{l_1k}, x_{l_2k}, \dots$  соответственно и выбирают индекс строки, для которого вычисленное отношение минимально. Если неоднозначность остается, процесс выделения индекса исключаемого вектора продолжается. Для этого переходят ко второму столбцу матрицы обращенного базиса, с помощью элементов которого формируют аналогичные отношения. Продолжая переход от одного столбца матрицы обращенного базиса к другому, приходят в конце концов к однозначному выделению исключаемого вектора. (Поскольку обратная матрица не может содержать двух пропорциональных столбцов, для последнего столбца будет выбрано единственное  $l$ .)

## § 2. Примеры заикливания

В литературе имеется только два примера задач, в которых при решении по обычному симплексному методу встречается заикливание (Гоффман [58] и Бил [4]). Известный пример Била [4] относится к двойственной задаче. Здесь мы проиллюстрируем явление заикливания в терминах исходной задачи. Приводимый ниже пример, также принадлежащий Билу, публикуется впервые.

Таблица 8

I

Базис		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
	$c$		$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
$P_5$	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
$P_6$	0	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	$\frac{3}{4}$	-150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0

II

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	0	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0
$P_6$	0	0	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	30	$\frac{7}{50}$	-33	-3	0	0

III

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0
$P_2$	150	0	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	$\frac{2}{25}$	-18	-1	-1	0

IV

$P_3$	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0
$P_2$	150	0	$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0
$P_7$	0	1	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1
		0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	2	-3	0

Продолжение

V

Базис		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
	$c$		$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
$P_3$	$-\frac{1}{50}$	0	$-\frac{125}{2}$	10,500	1	0	50	-150	0
$P_4$	6	0	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
$P_7$	0	1	$\frac{125}{2}$	-10,500	0	0	-50	150	1
		0	$\frac{1}{2}$	-120	0	0	1	-1	0

VI

$P_5$	0	0	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0
$P_4$	6	0	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	$\frac{7}{4}$	-330	$-\frac{1}{50}$	0	0	2	0

VII

$P_5$	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
$P_6$	0	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	$\frac{3}{4}$	150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0

Таблица 9

I

Базис		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
	$c$		$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
$P_5$	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
$P_6$	0	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	$\frac{3}{4}$	-150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0

II

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	0	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0
$P_6$	0	0	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	30	$\frac{7}{50}$	-33	-3	0	0

III

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0
$P_2$	150	0	0	1	$\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0
$P_7$	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	$\frac{2}{25}$	-18	-1	-1	0

Продолжение

IV

Базис		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
	$c$		$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
$P_1$	$-\frac{3}{4}$	0	1	-160	0	-4	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	0
$P_3$	$-\frac{1}{50}$	0	0	500	1	-250	$-\frac{100}{3}$	$\frac{50}{3}$	0
$P_7$	0	1	0	-500	0	<b>250</b>	$\frac{100}{3}$	$-\frac{50}{3}$	1
		0	0	-40	0	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0

V

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{2}{125}$	1	-168	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{125}$
$P_3$	$-\frac{1}{50}$	1	0	0	1	0	0	0	1
$P_4$	6	$\frac{1}{250}$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{250}$
		$-\frac{1}{125}$	0	-36	0	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{125}$

VI

$P_1$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{25}$	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$
$P_3$	$-\frac{1}{50}$	1	0	0	1	0	0	0	1
$P_6$	0	$\frac{3}{100}$	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$
		$-\frac{1}{20}$	0	-15	0	$-\frac{21}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{20}$

Задача заключается в минимизации

$$-\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4$$

при условиях

$$\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0,$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0,$$

$$x_3 + x_7 = 1,$$

$$x_j \geq 0.$$

Чтобы выявить зацикливание в этой задаче, будем выбирать в качестве вектора, подлежащего исключению, вектор с наименьшим индексом строки (т. е. по правилу, установленному в гл. 4 для исключения неоднозначности). При подсчете  $\theta_0$  неоднозначности возникают в первом, третьем и пятом планах. Итерации процесса приведены в таблице 8, из которой можно видеть, что седьмой план идентичен первому. Если мы будем продолжать процесс начиная с седьмого плана, то последовательность предыдущих планов опять повторится и решение никогда не будет достигнуто.

Однако при использовании правила, описанного в § 1 этой главы, можно выбрать другую последовательность планов, приводящую к решению задачи. Соответствующие итерации сведены в таблицу 9, где шестой план является оптимальным. Мы видим, что в процессе решения ни один из планов не повторяется. Неоднозначность при подсчете  $\theta_0$  появляется в первой и третьей итерациях. Первые три плана таблиц 8 и 9 совпадают. Различие начинается при переходе от третьего к четвертому плану, где во втором случае вместо вектора  $P_1$  исключается  $P_2$ . Минимальное значение линейной формы равно  $-\frac{1}{20}$ .



## ГЛАВА 8

### ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

#### § 1. Линейная форма с коэффициентами, зависящими от параметра

Основная трудность, возникающая при практическом использовании линейного программирования, состоит в определении достаточно точных и надежных числовых параметров задачи. Очень важно, следовательно, изучить поведение решения задачи линейного программирования при изменении ее коэффициентов. Исследования подобного типа составляют предмет параметрического линейного программирования. Изменению могут подвергаться элементы матрицы  $A$ , коэффициенты линейной формы, а также постоянные правой части условий задачи. Первая из этих возможностей до сих пор не изучена. Детально рассматривался лишь частный случай последних двух возможностей \*). В этой области остается еще много нерешенных проблем.

Исследования по параметрическому программированию применительно к изменению коэффициентов линейной формы возникли в связи с изучением задачи планирования производства, описанной в § 1 гл. 11 \*\*). Там вводится параметр  $\lambda$ , равный отношению стоимости увеличения выпуска продукции на единицу за один месяц к стоимости хранения единицы продукции за то же время. Прежде чем выбрать некоторый график производства, оптимальный для определенного значе-

---

\*) См. Гасс и Саати [48] и Манн [74]. В дальнейшем мы будем касаться только материала, содержащегося в этих источниках.

\*\*) Читатель, не знакомый с этой задачей, должен сначала ознакомиться с указанным параграфом.

ния параметра  $\lambda$ , может оказаться полезным исследовать предварительно систему графиков производства, оптимальных для целого интервала изменения  $\lambda$ . Благодаря этому можно принять более точное решение, которое не только лучше всего соответствует производственным возможностям и возможностям хранения, но также подходит и по факторам, не включенным в модель линейного программирования. Ниже описывается процесс, дающий возможность определить для различных интервалов  $\lambda$  соответствующие оптимальные планы. Эта вычислительная схема является некоторым видоизменением обычного симплексного метода.

Математически задача ставится следующим образом. Пусть  $\delta \leq \lambda \leq \varphi$ , где  $\delta$ ,  $\varphi$  — произвольные действительные числа. Найти для каждого  $\lambda$  в этом интервале вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , минимизирующий

$$\sum_{j=1}^n (d_j + \lambda d'_j) x_j \quad (1.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $d_j$ ,  $d'_j$ ,  $a_{ij}$  и  $b_i$  — заданные постоянные. Допустим, что рассматриваемая задача не вырождена и нам известен некоторый опорный план системы (1.2). Используя симплексный метод, можно либо решить задачу при  $\lambda = \delta$  (случай А), либо убедиться, что линейная форма (1.1) при  $\lambda = \delta$  не ограничена снизу на выпуклом множестве, определяемом условиями (1.2) (случай В).

Случай А. Поскольку в нашей задаче коэффициенты линейной формы равны  $c_j = d_j + \lambda d'_j$ , то для любого базиса разности  $z_j - c_j$  можно представить в виде линейной функции от  $\lambda$ . Пусть эта линейная функция выражается в виде

$$z_j - c_j = \alpha_j + \lambda \beta_j.$$

Тогда, поскольку мы имеем дело со случаем А,

$$\alpha_j + \delta \beta_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

что означает, что система неравенств

$$\alpha_j + \lambda \beta_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

совместна. Для всех  $\beta_j < 0$

$$\lambda \geq -\frac{\alpha_j}{\beta_j}$$

и для всех  $\beta_j > 0$

$$\lambda \leq -\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Пусть

$$\lambda = \begin{cases} \max_{\beta_j < 0} \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right), \\ -\infty, & \text{если все } \beta_j \geq 0; \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min_{\beta_j > 0} \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right), \\ +\infty, & \text{если все } \beta_j \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что решение задачи (1.1), (1.2) при  $\lambda = \delta$  будет совпадать с оптимальным планом этой задачи для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих условию

$$\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}.$$

Если  $\bar{\lambda} = +\infty$ , процесс решения закончен. Допустим теперь, что  $\bar{\lambda}$  конечно,  $\bar{\lambda} = -\frac{\alpha_k}{\beta_k}$  при  $\beta_k > 0$ . Если все соответствующие  $x_{ik} \leq 0$ , то согласно симплексному методу и определению  $\lambda$  линейная форма задачи при  $\lambda > \bar{\lambda}$  не ограничена снизу. В этом случае процесс также заканчивается\*). Если по крайней мере одна из  $x_{ik} > 0$ , то, как и при обычном симплексном методе, в базис вводится вектор  $P_k$  и исключается некоторый вектор  $P_l$ . Заметим, что

$$x_{lk} > 0. \quad (1.4)$$

**Теорема 1.** *Новый базис соответствует оптимальному плану хотя бы для одного значения параметра  $\lambda$ . Если интервал*

$$\underline{\lambda}' \leq \lambda \leq \bar{\lambda}'$$

---

\*) Как и в обычном симплексном методе, вектор-столбец  $X_k = (x_{1k}, \dots, x_{mk})$ , где  $X_k = B^{-1}P_k$ , а  $B$  — базис.

является полной совокупностью значений  $\lambda$ , для которых новый базис соответствует оптимальному плану, то

$$\underline{\lambda}' = \bar{\lambda}.$$

Доказательство. Новый базис соответствует некоторому плану, поскольку переход к нему осуществлялся с помощью симплексного метода. Далее, неравенства (применительно к новому базису)

$$\alpha'_j + \lambda \beta'_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

совместны. Действительно, если  $\lambda = \bar{\lambda}$ , то при образовании нового базиса был введен вектор  $P_k$ , для которого

$$z_k - c_k = \alpha_k + \bar{\lambda} \beta_k.$$

Следовательно, новый базис отвечает оптимальному плану задачи для  $\lambda = \bar{\lambda}$ , т. е.  $\bar{\lambda}$  удовлетворяет неравенствам (1.5).

Остается показать, что любое  $\lambda < \bar{\lambda}$  не удовлетворяет системе неравенств (1.5). Имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_i &= -\frac{\alpha_k}{x_{ik}}, \\ \beta'_i &= -\frac{\beta_k}{x_{ik}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Допустим, что системе неравенств (1.5) удовлетворяет некоторое  $\lambda$ . Тогда, в частности,

$$\alpha'_i + \lambda \beta'_i \leq 0,$$

или согласно (1.4) и (1.6)

$$-\alpha_k - \lambda \beta_k \leq 0.$$

Поскольку  $\beta_k > 0$ , из последнего неравенства следует

$$\lambda \geq -\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \bar{\lambda}.$$

Аналогичным образом можно переходить от одного интервала изменения  $\lambda$  к другому, пока один из интервалов не включит  $\lambda = \varphi$ . Для обоснования этого процесса необходимо лишь убедиться в отсутствии повторяющихся базисов. Это вытекает из следующего замечания. Если  $\bar{\lambda}$  заменяется на  $\bar{\lambda} + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторое (достаточно малое) положительное число, то

последующие шаги должны быть подобны уже описанным. Предположение невырожденности гарантирует, что мы либо решим задачу при  $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$ , либо удостоверимся в неограниченности для этого значения  $\lambda$  линейной формы задачи. Следовательно, невозможно неограниченно долго оставаться на таком значении  $\lambda$ , что  $\underline{\lambda} = \lambda = \bar{\lambda}$ . Пройдя раз данный базис, мы не можем вернуться ни к нему, ни к другому базису, соответствующему меньшим значениям  $\lambda$ . По доказанной теореме интервалы  $\lambda$  не будут перекрываться. Вполне возможно (и часто встречается на практике), что для некоторых планов  $\underline{\lambda} = \bar{\lambda}$ . Однако, как мы видели, эта ситуация не может сохраняться неограниченно долго в силу непрерывного чередования базисов. Величины  $\bar{\lambda}$  и  $\underline{\lambda}$  называются *критическими значениями* параметра  $\lambda$ , а оптимальные планы, соответствующие различным значениям  $\lambda$ , называются *критическими решениями*.

Случай В. Здесь возможны две ситуации.

1. Пусть  $P_k$  — вектор, подлежащий вводу в базис. По условию  $\alpha_k + \delta\beta_k > 0$  и все  $x_{ik} \leq 0$ . Если  $\beta_k \geq 0$ , то линейная форма задачи не ограничена снизу для любого  $\lambda$ .

2. Если  $\beta_k < 0$ , неравенство  $\alpha_k + \lambda\beta_k > 0$  будет иметь место для всех

$$\lambda < \lambda'_1 = -\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right),$$

и, следовательно, для любого  $\lambda$  из интервала  $\delta \leq \lambda < \lambda'_1$  задача не имеет оптимального плана. На этой стадии неизвестно, существуют ли при  $\lambda'_1$  решения исследуемой задачи. Если все  $\alpha_j + \lambda'_1\beta_j \leq 0$ , то оптимальный план задачи для  $\lambda_0 = \lambda'_1$  получен.

Пусть  $\lambda_1 = \min_{\beta_j > 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$ , тогда этот план является решением задачи при  $\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$ , и процесс можно продолжать, как и в случае А.

Если не все  $\alpha_j + \lambda'_1\beta_j \leq 0$ , в базис можно ввести любой вектор, для которого  $\alpha_j + \lambda'_1\beta_j > 0$ . Процесс продолжается до тех пор, пока не окажется, что либо  $\alpha_j + \lambda'_1\beta_j \leq 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ , либо пока не будет обнаружен вектор  $P_t$  с  $\alpha_t + \lambda'_1\beta_t > 0$ , все коэффициенты разложения которого по базису неположительны. Если  $\alpha_j + \lambda'_1\beta_j \leq 0$  для всех  $j$ , при-

ходим к случаю А. В последнем случае, если  $\beta_i \geq 0$ , линейная форма задачи не ограничена снизу при всех  $\lambda \geq \lambda'_1$ . Если  $\beta_i < 0$ , то, как было показано, линейная форма исследуемой задачи при  $\lambda < \lambda'_2 = -\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$ , где  $\lambda'_2 > \lambda'_1$ , не ограничена снизу.

Попытаемся теперь определить, существует ли оптимальный план для  $\lambda = \lambda'_2$ . Последовательные применения вышеописанной процедуры либо приведут нас к определению оптимального плана для некоторого  $\lambda$  (и тогда можно использовать случай А), либо позволят обнаружить, что при любом  $\lambda$  линейная форма задачи не ограничена снизу.

Если задаться критическим решением для произвольного интервала  $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$ , то можно сдвинуться вправо от  $\lambda_{i+1}$  с помощью процесса случая А. Сдвиг влево от  $\lambda_i$  можно осуществить с помощью введения в базис вектора  $P_q$ , для которого

$$\lambda_i = \max_{\beta_j < 0} \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) = -\frac{\alpha_q}{\beta_q}.$$

Если все  $x_{iq} \leq 0$ , то для  $\lambda < \lambda_i$  оптимальных планов не существует.

Подводя итоги, можно заключить, что

1. С помощью видоизменения обычного симплексного процесса можно полностью исследовать задачу линейного программирования, функция цели которой линейно зависит от одного параметра.

2. Задаваясь любым оптимальным планом, можно определить систему критических решений и соответствующие критические значения для всех возможных значений параметра.

3. Критическое решение является оптимальным планом для всех  $\lambda$  из некоторого замкнутого интервала.

4. Множество значений параметра  $\lambda$ , при которых задача обладает оптимальным планом, замкнуто и связно.

При помощи электронных вычислительных машин были решены многие крупномасштабные задачи линейного программирования с параметрической линейной формой. Одна из таких задач с 33 уравнениями и 65 неизвестными была решена для всех положительных значений параметра за 53 итерации. Полное решение включало 23 критических решения. Все рассмотренные задачи имели оптимальный план для  $\lambda = 0$ , и исследуемая область изменения параметра составляла

полупрямую  $0 \leq \lambda < \infty$ . В качестве исходного для параметрического процесса принимался оптимальный план задачи при  $\lambda = 0$ . Этот план вычислялся с помощью обычного симплексного процесса.

**Пример.** Минимизировать

$$\lambda x - y$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} 3x - y &\geq 5, \\ 2x + y &\leq 3, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где

$$-\infty < \delta \leq \lambda \leq \varphi < +\infty.$$

Дополним задачу искусственной переменной  $v$ , введя ее в условия (1.7) и с достаточно большим положительным коэффициентом  $w$  в линейную форму. Получаем:

$$\left. \begin{aligned} 3(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) - u_1 + v &= 5, \\ 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + u_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

с соответствующей линейной формой

$$\lambda(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + wv.$$

В первой части таблицы 10 система (1.8) записана в виде обычной симплексной таблицы. Поскольку система условий задачи содержит единичный вектор  $P_6$ , достаточно использовать лишь искусственный вектор  $P_7$  с большим положительным весом  $w$ . Таким образом, исходный базис состоит из векторов  $P_6, P_7$ . Элементы  $z_j - c_j$ , записываемые в виде  $\alpha_j + \lambda\beta_j + w\gamma_j$ , вводятся в  $(m+1)$ -ю,  $(m+2)$ -ю и  $(m+3)$ -ю строки соответственно. Например, вектор  $P_1$  имеет  $z_1 - c_1 = -\lambda + 3w$ , следовательно, мы вводим 0,  $-1$  и 3 в соответствующие строки под  $P_1$ . Значение линейной формы  $z = 5w$ . Поскольку вектор  $P_1$  имеет наибольшую положительную величину в  $(m+3)$ -й строке, он вводится в базис, а  $P_6$  исключается из базиса (вторая итерация). Подобным же образом вектор  $P_7$  заменяется на  $P_4$  в третьей итерации. Теперь, поскольку все элементы  $(m+3)$ -й строки равны нулю,

Таблица 10

Первая итерация

$i$	Базис	$c$	$P_0$	$\lambda$	$-\lambda$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$w$
				$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
1	$P_7$	$w$	5	3	-3	-1	1	-1	0	1
2	$P_6$	0	3	2	-2	1	-1	0	1	0
$m+1$			0	0	0	1	-1	0	0	0
$m+2$			0	-1	1	0	0	0	0	0
$m+3$			5	3	-3	-1	1	-1	0	0

Вторая итерация

$P_7$	$w$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	1
$P_1$	$\lambda$	$\frac{3}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
		$\frac{0}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{0}{2}$	0
		$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
		$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0

Третья итерация

$P_4$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	-1	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$P_1$	$\lambda$	$\frac{8}{5}$	1	-1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
		$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
		$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
		$\frac{5}{5}$	0	0	0	0	0	0

Четвертая итерация

$P_4$	1	5	3	-3	-1	1	-1	0
$P_6$	0	8	5	-5	0	0	-1	1
		5	3	-3	0	0	-1	0
		0	-1	1	0	0	0	0



исходный опорный план задачи получен. Векторами его базиса служат  $P_1$  и  $P_4$  и план состоит из  $x_1 = \frac{8}{5}$ ,  $y_2 = \frac{1}{5}$ ,  $x_2 = y_1 = u_1 = u_2 = 0$ . Значение линейной формы  $z = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}\lambda$ .

Поскольку сначала мы хотим определить, существует ли оптимальный план при  $\lambda = 3$ , введем в базис вектор с отрицательной компонентой в  $(m+2)$ -й строке. Таким в рассматриваемом примере является  $P_5$ . Однако все  $x_{i5} \leq 0$ , и, следовательно, при  $\lambda < \lambda'_1$  оптимальных планов не существует. Применяя процесс случая В, убеждаемся, что все  $\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j \leq 0$  и третья итерация приводит к оптимальному плану при  $-2 \leq \lambda \leq 3 \left( \lambda_1 = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)$ . Вводя в базис вектор  $P_k = P_6$

(отыскивается решение для  $\lambda \geq 3$ ) и исключая  $P_1$ , получим новый оптимальный план с базисом, состоящим из векторов  $P_4$  и  $P_6$ . Решением является  $y_2 = 5$ ,  $u_2 = 8$ ,  $z = 5$ ,  $x_1 = x_2 = y_1 = u_1 = 0$  (заметим, что здесь значение линейной формы не зависит от  $\lambda$ ). Применяя алгоритм случая А, имеем  $P_k = P_2$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ . Поскольку все  $x_{i2} \leq 0$ , линейная форма задачи не ограничена снизу для всех значений  $\lambda > 3$ . Поэтому задача имеет только одно критическое решение для  $-2 \leq \lambda \leq 3$  и не единственный оптимальный план при  $\lambda = 3$ .

Применение рассмотренного здесь метода к решению задач теории игр дано в гл. 12.

## § 2. Параметрическая двойственная задача

С задачей линейного программирования, форма которой зависит от параметра, можно связать двойственную задачу. От параметра в этом случае будут зависеть правые части условий новой задачи. В этом параграфе будет рассмотрена общая задача линейного программирования подобного типа. Пусть  $\sigma \leq \theta \leq \rho$ . Двойственная задача заключается в отыскании такого вектора

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который минимизирует

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i + \theta b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{и} \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Допустим, что найден оптимальный план  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  задачи при  $\theta = \sigma$ . Каждая его компонента  $\bar{x}_i$  является линейной функцией  $\sigma$  вида

$$\bar{x}_i = q_i + \sigma p_i \geq 0.$$

Поскольку  $\bar{x}_i \geq 0$ , система неравенств

$$\bar{x}_i = q_i + \theta p_i \geq 0 \quad (2.1)$$

совместна.

Если все  $p_i = 0$ , то план  $\bar{X}$  является оптимальным для всех  $\theta$ . Если все  $p_i \geq 0$ , план  $\bar{X}$  оптимален для всех  $\theta \geq \sigma$ . Наконец, если все  $p_i \leq 0$ , план  $\bar{X}$  оптимален для всех  $\theta \leq \sigma$ . В общем случае, однако,  $p_i$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому при определении интервала значений  $\theta$ , на котором данный план оптимален, необходимо провести исследование, аналогичное проведенному в предыдущем параграфе.

Для  $p_i > 0$  имеем

$$\theta \geq -\frac{q_i}{p_i}.$$

Положим

$$\underline{\theta} = \begin{cases} \max_{p_i > 0} \left( -\frac{q_i}{p_i} \right), \\ -\infty, & \text{если все } p_i \leq 0. \end{cases}$$

Если  $p_i < 0$ ,

$$\theta \leq -\frac{q_i}{p_i}.$$

Положим

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \min_{p_i < 0} \left( -\frac{q_i}{p_i} \right), \\ +\infty, & \text{если все } p_i \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что план (2.1) оптимален для всех  $\theta$  из интервала

$$\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}.$$

Допустим, что  $\bar{\theta} \neq +\infty$ . При увеличении  $\theta$  вектор  $\bar{X}$  с компонентами  $q_i + \theta p_i$  по-прежнему удовлетворяет условию оптимальности, т. е.  $z_j - c_j \leq 0$  при любом  $j$ . Однако этот вектор может и не являться планом рассматриваемой задачи.

При достаточно большом увеличении  $\theta$  одна из величин

$$\bar{x}_i = q_i + \theta p_i$$

становится отрицательной. Если  $\bar{x}_l$  — первая из компонент, меняющих знак, то

$$\bar{\theta} = -\frac{q_l}{p_l},$$

где  $p_l < 0$ . Теперь желательно определить новый оптимальный план для значений  $\theta \geq \bar{\theta}$ . Нам необходимо определить вектор, подлежащий введению в базис, и вектор, исключаемый из базиса, так, чтобы коэффициенты разложения вектора ограничений (вектора, компонентами которого служат правые части условий задачи) по векторам нового базиса были неотрицательны, а преобразованные величины разностей  $z_j - c_j$  — неположительны. Метод выбора основывается на следующем утверждении:

**Теорема 2.** Если вектор  $P_l$ , соответствующий  $\bar{\theta} = -\frac{q_l}{p_l}$ , исключается из базиса и в базис вводится вектор  $P_k$ , для которого

$$\frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \min_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}},$$

то образуется новый оптимальный план хотя бы для одного значения  $\theta$ . Если новый базис определяет решение задачи для интервала  $\theta' \leq \theta \leq \bar{\theta}'$ , то  $\bar{\theta} = \theta'$ .

**Доказательство.** Коэффициенты разложения вектора ограничений по векторам нового базиса определяются такими формулами:

$$\bar{x}'_i = q'_i + \theta p'_i = q_i + \theta p_i - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} (q_l + \theta p_l) \quad \text{для } i \neq l,$$

$$\bar{x}'_k = q'_k + \theta p'_k = \frac{q_l + \theta p_l}{x_{lk}}.$$

Вектор  $\bar{X}'$  является планом задачи для

$$\theta = \bar{\theta} = -\frac{q_l}{p_l}.$$

Если вектор  $\bar{X}'$  является планом для некоторого другого значения  $\theta$ , то последнее должно удовлетворять условию

$$\theta \geq \bar{\theta}.$$

Действительно,  $x_{lk} < 0$ ,  $p_l < 0$  и

$$\frac{q_l + \theta p_l}{x_{lk}} \geq 0,$$

откуда

$$\theta \geq -\frac{q_l}{p_l} = \bar{\theta}.$$

Чтобы показать, что новый базис связан с оптимальным планом, рассмотрим

$$(z_j - c_j)' = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k).$$

Поскольку все  $z_j - c_j \leq 0$  и  $x_{lk} < 0$ , все разности  $(z_j - c_j)'$  при  $x_{lj} \geq 0$  также будут неположительными. Для того, чтобы получить

$$z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k) \leq 0$$

при  $x_{lj} < 0$ , необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство

$$z_j - c_j \leq \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k)$$

или

$$\frac{z_j - c_j}{x_{lj}} \geq \frac{z_k - c_k}{x_{lk}}.$$

Следовательно, вектор  $P_k$ , вводимый в базис, должен соответствовать

$$\min_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}}.$$

Если все  $x_{lj} \geq 0$ , то исследуемая задача при  $\theta > \bar{\theta}$  не имеет ни одного плана. Доказательство этого утверждения предоставляется читателю (см. § 2 гл. 9).

## З а м е ч а н и я

Для дополнительного чтения отсылаем читателя к работе Саати и Гасса [89].

## У п р а ж н е н и я

1. Решить следующую задачу, линейная форма которой зависит от параметра  $\lambda$  (решить для всех значений  $\lambda$ ):

Минимизировать

$$2\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - 3x_3 + \lambda x_4 + 2x_5 - 3\lambda x_6$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &+ 2x_5 &= 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 &&= 12, \\ -4x_2 + 3x_3 &+ 8x_5 + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

и  $x_j \geq 0$ .

2. Выписать задачу, двойственную к задаче упражнения 1, и решить ее для всех значений параметра.

3. Решить задачу планирования производства (упражнение 1 гл. 11) при линейной форме

$$16s_0 + \sum_{t=1}^4 s_t + \lambda \sum_{t=1}^5 y_t$$

которую следует минимизировать для всех значений  $\lambda \geq 0$ .

4. Видоизменить вычислительный процесс модифицированного симплексного метода применительно к задаче, линейная форма которой зависит от параметра.

## ГЛАВА 9

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ

В этой главе будет обсуждаться вопрос, встающий перед исследователем, который сформулировал задачу линейного программирования, определил необходимые параметры этой задачи и приступает к ее решению. *Какие предварительные исследования следует провести и какими вычислительными приемами целесообразно воспользоваться, чтобы, решая задачу, произвести наименьшее число операций?*

Одна из причин актуальности такого вопроса состоит в том, что, используя особенности данной конкретной задачи, можно существенно упростить ее решение. Так будет, например, в случае транспортной задачи и задачи планирования производства, обсуждаемых в гл. 10 и 11 соответственно.

В первом случае используется простое видоизменение симплексного метода, приспособленное для решения транспортной задачи. Во втором случае мы либо уменьшаем число уравнений системы и решаем задачу обычным симплексным методом, либо пользуемся еще более простым способом. Однако в некоторых случаях может оказаться, что попытки построения частных вычислительных схем хотя и интересны, но трудоемки, а иногда и бесплодны. Поэтому следует еще раз подчеркнуть, что любая задача линейного программирования может быть решена общими методами, рассмотренными в гл. 4 и 6.

В этой главе будут изложены некоторые приемы, позволяющие сократить объем вычислительной работы для большинства задач линейного программирования. Эти приемы приводят к уменьшению общего числа итераций, требуемых для получения оптимального плана. Некоторые из них описываются ниже, в § 1. Предварительно следует рассмотреть ряд особенностей симплексного метода. Симплексный метод подразделяется на два различных вычислительных этапа. Этап I

связан с определением исходного плана; этап II, начинающийся с этого плана, ведет к построению оптимального плана. Опыт вычислений показывает, что для решения задачи требуется примерно  $m$  итераций (где  $m$  — число уравнений рассматриваемой задачи), если вычисления начинаются с имеющегося базиса, состоящего из  $m$  единичных векторов. При использовании полного искусственного базиса число итераций увеличивается примерно до  $2m$ . Очевидно, что выгодно либо совсем исключить этап I, либо начать вычисления с возможно меньшего числа искусственных векторов.

На этапе I выбор нового вектора, подлежащего вводу в базис, определяется критерием, связанным с последовательным уменьшением влияния искусственных переменных на значение линейной формы. Этот критерий применяется до тех пор, пока «искусственная» часть линейной формы не станет равной нулю. При этом он не воздействует на ту часть линейной формы, которая в конечном счете должна быть сведена к минимуму на этапе II. Обычно значение линейной формы, связанное с исходным планом, бывает достаточно далеким от оптимума. Естественно ожидать, что число итераций этапа II будет зависеть от близости исходного плана к оптимальному. Иными словами, чем ближе к решению задачи исходный план, тем меньше итераций потребуется.

Следует отметить, что метод искусственного базиса обычно не учитывает специфики конкретной задачи. Например, в конкретной задаче можно иногда выделить систему  $m$  векторов, достаточно близкую к базису оптимального плана. Однако поскольку нет уверенности, что этот набор векторов составляет базис какого-либо плана задачи, использование симплексного метода, вообще говоря, невозможно. Вместе с тем представляется, что общее число итераций может быть уменьшено, если использовать дополнительную информацию о приростной структуре искомого решения задачи\*).

---

\*) Осторожность формулировок вышеприведенных замечаний связана с существованием соответствующих противоречащих примеров. Можно сконструировать задачу, решение которой начинается с полного искусственного базиса и минимум достигается точно за  $m$  итераций. Существуют также задачи, исходный план которых далек от оптимального, а решение укладывается в небольшое число итераций. В некоторых случаях исходный план задачи близок к оптимальному, но решение ее требует большого числа итераций.

Большинство вычислительных приемов, позволяющих получить «хорошее» первое приближение, основывается на приведенных здесь соображениях и связано с видоизменениями симплексного алгоритма (Гасс [46] и Орчард-Хейс [82]).

### § 1. Определение исходного плана

Система условий задачи линейного программирования размера  $m \times n$  может быть записана в трех основных формах. Допустим сначала, что система ограничений задачи имеет вид

$$AX = b \text{ при } b \geq 0, m < n. \quad (1.1)$$

Предположим, что по крайней мере одна из величин  $b_i > 0$ . Может представиться одна из трех возможностей:

1. Система не содержит единичных векторов, и вычисления начинаются с полного искусственного базиса.

2. Система содержит  $k$  различных единичных векторов, и этап I процесса начинается при наличии искусственных векторов.

3. Система содержит базис, состоящий из  $m$  единичных векторов, и вычисления начинаются с этапа II.

Если система условий задачи имеет вид

$$AX \leq b \text{ при } b \geq 0, \quad (1.2)$$

перепишем (1.2) в виде равенств с неотрицательными переменными (как описано в § 4 гл. 2). Полученная система уравнений содержит базис из  $m$  единичных векторов, и вычисления начинаются с этапа II.

Третья форма условий задачи имеет вид

$$AX \geq b \text{ при } b \geq 0. \quad (1.3)$$

Здесь мы также можем переписать (1.3) в виде уравнений с неотрицательными переменными, но получающаяся в результате этого система содержит  $m$  отрицательных единичных векторов. Пусть эта система имеет вид

$$AX - \bar{X} = b, \quad (1.4)$$

где

$$\bar{X} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$$

— неотрицательный вектор-столбец.



С помощью несложных преобразований системы (1.4) можно начать вычисления только при одном искусственном векторе.

Схема предусматривает определение  $\max_i b_i = b_s$  и сложение  $s$ -го уравнения системы (1.4) с любым другим уравнением этой системы, умноженным предварительно на  $-1$ . Получающаяся в результате система  $m$  уравнений будет содержать  $m-1$  различных положительных единичных векторов и потребует введения одного дополнительного вектора, соответствующего  $s$ -й переменной. Преобразования системы (1.4) имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} a'_{ij} &= -a_{ij} + a_{sj} \text{ для } i \neq s, j = 1, 2, \dots, n+m; \\ a'_{sj} &= a_{sj} \text{ для } j = 1, 2, \dots, n+m; \\ b'_i &= -b_i + b_s \text{ для } i \neq s; \\ b'_s &= b_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Рассмотрим для иллюстрации этой схемы систему неравенств

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Перепишем систему (1.6) в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_6 &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Здесь  $\max_i b_i = b_3 = 2$ . Применяя формулы (1.5) и (1.7), получаем окончательную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_6 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_6 &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7a)$$

В отличие от условий задачи, записанных в форме (1.7), в системе уравнений (1.7а) выбор исходного опорного плана требует ввода только одной искусственной переменной.

Можно, конечно, формулировать задачу, обладающую смешанными условиями (равенствами и неравенствами), т. е.  $AX \leq b$ , причем компоненты вектора  $b$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Тогда, как и ранее, можно с помощью соответствующих преобразований условий задачи ввести некоторое количество положительных единичных векторов.

До сих пор мы предполагали, что вычисления должны начинаться с исходного базиса, совпадающего с единичной матрицей.

В § 2 гл. 4 упоминалось вскользь о возможности выбора произвольной системы  $m$  векторов в качестве исходного базиса. В этом случае естественно в качестве исходной системы векторов выбрать систему, близкую к оптимальному плану. Такой выбор должен основываться на тщательном, но не трудоемком анализе задачи. После этого следует попытаться подсчитать матрицу, обратную к соответствующей матрице порядка  $m$ . При этом возможны следующие альтернативы:

1. Система  $m$  векторов линейно независима (обратная матрица существует).

а. Решение соответствующей системы уравнений приводит к плану задачи. В этом случае симплексный процесс содержит лишь этап II, начинающийся с полученного плана.

б. Решение соответствующей системы уравнений не является планом задачи (т. е. не все  $x_i$  неотрицательны). Здесь, как будет показано ниже, процесс можно начать с этапа I, введя лишь один искусственный вектор.

2. Система  $m$  векторов линейно зависима, и матрица ее имеет ранг  $k < m$ . В этом случае можно перейти к этапу I, введя либо  $m - k$ , либо  $m - k + 1$  искусственных векторов (более подробно об этом смотри Гасс [46]). Можно также продолжать выбор векторов из числа оставшихся до тех пор, пока не будет получена линейно независимая система из  $m$  векторов. Порядок дальнейшего выбора может быть подсказан конкретной задачей (по этому поводу см. работу Орчарда-Хейса [82]).

С помощью простого преобразования, подобного примененному к системе неравенств  $AX \geq b$ , в случае 1б можно

начать этап I с одним искусственным вектором. Для облегчения изложения опишем это преобразование применительно к первоначальной симплексной таблице гл. 4 (см. табл. 4 на стр. 91). Допустим, что выбранными векторами являются  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , которые линейно независимы, но не составляют базиса какого-либо плана задачи. Пусть  $x_{ij}$  для  $i=1, 2, \dots, m+1$  и  $j=0, 1, \dots, n$  — элемент симплексной таблицы, расположенной в  $j$ -м столбце и  $i$ -й строке. Очевидно, что  $x_{ii}=1$  для  $i=1, 2, \dots, m$ . Здесь мы предполагаем отрицательность некоторого  $x_{i0}$  (система  $P_1, \dots, P_m$  не соответствует плану задачи). Пусть  $x_{s0} = \min_i x_{i0}$ . Преобразуем теперь все элементы таблицы по формулам

$$\left. \begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij} - x_{sj} \quad \text{для } i \neq s, m+1, \\ x'_{sj} &= -x_{sj}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Формулы (1.8), справедливые для  $j=0, 1, \dots, n$ , соответствуют вычитанию  $s$ -й строки таблицы из всех других строк и умножению  $s$ -й строки на  $-1$ . Это преобразование приводит к базису, состоящему из  $m-1$  векторов из числа выбранных и одного искусственного вектора, соответствующего переменной  $x'_{s0} > 0$ . Новыми элементами  $(m+1)$ -й строки являются:

$$\left. \begin{aligned} x'_{m+1, j} &= x_{m+1, j} - x_{sj} \sum_1^m c_i \quad \text{для } j \neq s, \\ x'_{m+1, s} &= -\sum_1^m c_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.8')$$

Последующие итерации направляются элементами  $s$ -й строки, пока искусственная переменная не сведется к нулю или пока не будет определено, что задача не имеет ни одного плана. Строка  $s$ -я соответствует  $(m+2)$ -й строке таблицы 4 гл. 4, составленной по одному искусственному вектору. Поскольку нас интересует «существенная» часть линейной формы, отвечающая реальным переменным задачи, необходимо видоизменить критерий выбора вектора, вводимого в базис. Выберем вектор  $P_k$  из условия

$$x'_{m+1, k} = \max_{x'_{sj} > 0} x'_{m+1, j}. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) устанавливает, что для вводимого вектора искусственная часть величины  $z_j - c_j$ , равная  $x'_{sj}$ , положительна, а существенная часть, равная  $x'_{m+1, j}$ , принимает возможно большее значение. Этот критерий ведет к последовательному уменьшению искусственной части линейной формы и в то же время имеет тенденцию уменьшать ее существенную часть. Если

$$\min_i \frac{x'_{i0}}{x'_{ik}} = \frac{x'_{s0}}{x'_{sk}} \quad \text{для } x'_{ik} > 0,$$

то искусственный вектор будет исключен и начнется этап II. Если  $x'_{sk}$  не является направляющим элементом, то при следующей итерации вводится вектор  $P_q$  для которого

$$x''_{m+1, q} = \max_{x''_{sj} > 0} x''_{m+1, j}$$

и т. д., пока искусственный вектор не будет исключен или пока не выяснится, что задача не имеет ни одного плана.

В некоторых случаях задача линейного программирования может заключаться в минимизации различных линейных форм при одних и тех же линейных ограничениях. В подобных случаях решается сначала задача, связанная с одной из линейных форм. После определения оптимального плана первой задачи легко определить, не является ли он также решением и для оставшихся линейных форм. При использовании обычного симплексного метода необходимо включить в таблицу для каждой линейной формы по одной дополнительной строке, преобразующейся по обычным формулам исключения. Совокупность линейных форм, для которых полученный план является оптимальным, определяется из рассмотрения соответствующих элементов  $z_j - c_j$ . При использовании модифицированного процесса оптимальность линейной формы определяется при помощи обращенной матрицы текущего базиса. Если оптимальный план для первой линейной формы не оптимизирует ни одной из оставшихся линейных форм, то его можно использовать в качестве исходного для решения задачи со следующей линейной формой. Могут встретиться также задачи, двойственные к рассмотренной, т. е. задачи, связанные с несколькими векторами правых частей условий (векторами ограничений). К ним относятся, например, эконо-

мические задачи, связанные с рядом различных сочетаний требующихся товаров (см. § 2 гл. 11).

Такую задачу можно решить следующим способом.

Пусть исходная задача заключается в минимизации

$$cX \quad (1.10)$$

при условиях

$$AX = P_0, \quad (1.11)$$

$$X \geq 0. \quad (1.12)$$

Одновременно с (1.10) — (1.12) необходимо также решить следующую совокупность задач:

Минимизировать

$$cX$$

при условиях

$$AX = P_{0q}, \quad q = 1, 2, \dots, r;$$

$$X \geq 0.$$

Сначала решается задача (1.10) — (1.12). При использовании обычного симплексного метода таблица дополняется векторами  $P_{0q}$ , которые преобразуются обычным образом. Если после определения оптимального плана задачи (1.10) — (1.12) все компоненты всех  $P_{0q}$  останутся неотрицательными, то этот план является оптимальным для всех  $P_{0q}$ . Предположим теперь, что для некоторого  $q=r$  не все компоненты преобразованного вектора  $P_{0r}$  неотрицательны. Для получения исходного плана этой задачи найдем минимальную компоненту преобразованного вектора  $P_{0r}$  и применим формулы (1.8) и (1.8'). В результате образуется базис, состоящий из одного искусственного вектора и  $m-1$  векторов из базиса предшествующего оптимального плана. После этого задача решается обычным способом.

Аналогично определяется оптимальный план задачи и для любого другого вектора  $P_{0q}$ , имеющего хотя бы одну отрицательную компоненту. Вместо того чтобы применять способ, связанный с преобразованиями (1.8), можно исследовать рассматриваемую задачу с помощью ее двойственной интерпретации. В этом случае мы выбираем базис, скажем  $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ , подсчитываем его обращенную матрицу, определяем, что  $B^{-1}P_0 \geq 0$  и что

$$c^0 B^{-1} P_j - c_j = z_j - c_j \leq 0. \quad (1.13)$$

для всех  $j$ . Здесь  $c^0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  — вектор-строка. Таким образом,  $B$  служит базисом оптимального плана задачи (1.10) — (1.12). Допустим, что  $B$  не является базисом ни одного из планов задачи, связанной с ограничениями

$$AX = P_{0r}. \quad (1.14)$$

Другими словами, хотя бы одна из компонент вектора  $B^{-1}P_{0r}$  отрицательна. Задача, двойственная к (1.10), (1.14) и (1.12), заключается в максимизации

$$WP_{0r}$$

при условиях

$$WA \leq c.$$

Из (1.13) следует, что базис  $B$  связан с планом двойственной задачи  $W^0 = c^0 B^{-1}$ . Действительно,

$$W^0 P_j - c_j \leq 0.$$

Этот план двойственной задачи не является ее решением.

Вычислительный способ, связанный с решением двойственной задачи и называемый *двойственным симплексным методом*, был впервые предложен Лемке [70].

## § 2. Двойственный симплексный метод

Метод будет описан применительно к общей задаче линейного программирования, заключающейся в минимизации линейной формы

$$cX$$

при условиях

$$AX = b$$

и

$$X \geq 0.$$

Соответствующая двойственная задача формулируется следующим образом:

Обратить в максимум линейную форму

$$Wb$$

при условиях

$$WA \leq c.$$

Допустим, что мы выбрали такой базис  $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ , что по крайней мере одна из компонент  $B^{-1}b$  отрицательна и  $c^0 B^{-1}P_j \leq c_j$  для всех  $j$ . Тогда вектор  $W^0 = c^0 B^{-1}$  является планом двойственной задачи. Значение линейной формы, соответствующее этому плану, равно

$$c^0 B^{-1}b. \quad (2.1)$$

Мы собираемся здесь предложить вычислительную процедуру, приводящую к оптимальному плану двойственной задачи. В соответствии с теоремами двойственности гл. 5, одновременно с этим будет получен и оптимальный план исходной задачи. Процесс связан с определением базиса, для которого

1) двойственные неравенства будут по-прежнему удовлетворяться;

2) значение линейной формы двойственной задачи увеличится или останется неизменным \*).

Чередование базисов продолжается либо до достижения максимума двойственной линейной формы, либо до выявления ее неограниченности. В процессе решения условие оптимальности не нарушается. Через конечное число шагов определится план исходной задачи, который вместе с тем будет ее решением.

Обозначим через  $B_i$  строки матрицы  $B^{-1}$ . Тогда коэффициенты разложения вектора  $b$  по векторам базиса  $B$  определяются соотношениями  $x_i = B_i b$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ . Пусть

$$x_i = B_i b = \min_i B_i b < 0.$$

Вектор  $P_i$ , как будет видно далее, следует исключить из базиса. Для векторов, не входящих в базис, т. е. таких, что  $W^0 P_j < c_j$ , подсчитывается  $x_{ij} = B_i P_j$ . Допустим, что по крайней мере одна из  $x_{ij} < 0$ . Для совокупности  $x_{ij} < 0$  образуют отношения  $\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}$ . Пусть

$$\theta = \min_{x_{ij} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} = \frac{z_k - c_k}{x_{lk}} > 0 **). \quad (2.2)$$

\*) В случае вырожденности плана двойственной задачи значение ее линейной формы может и не увеличиться при переходе к новому базису. Признаком вырожденности является наличие более чем  $m$  равенств вида  $c^0 B^{-1}P_j = c_j$ .

\*\*) Этот критерий для выбора вектора, подлежащего вводу в базис, эквивалентен критерию, использованному в параметрической двойственной задаче (теорема 2 § 2 гл. 8).

Тогда для включения в новый базис выбирается вектор  $P_k$ , заменяющий вектор  $P_l$ . Новым базисом является

$$\bar{B} = (P_1 \dots P_{l-1} P_k P_{l+1} \dots P_m).$$

$\bar{B}^{-1}$  образуется из  $B^{-1}$  с помощью формул исключения, как описано в § 1 гл. 6. Читатель легко может проверить, что новым планом двойственной задачи является

$$\bar{W} = W^0 - \theta B_l, \quad (2.3)$$

причем соответствующее значение линейной формы равно

$$\bar{W}\bar{b} = W^0 b - \theta x_l. \quad (2.4)$$

Коэффициенты разложения вектора ограничений  $b$  по векторам нового базиса  $\bar{B}$  можно получить с помощью обычных формул исключения или же прямо из соотношения  $\bar{X} = \bar{B}^{-1}b$ . Если все  $\bar{X} \geq 0$ , то определен оптимальный план исходной задачи. Если это не так, то, как мы знаем, по крайней мере  $\bar{x}_l = \bar{B}_l b > 0$ . В этом случае переходят к новой итерации двойственного симплексного процесса, выбирая вектор, подлежащий исключению из базиса, а затем вектор, подлежащий вводу в него. Процесс продолжается до получения базиса, соответствующего оптимальному плану двойственной задачи, а следовательно, и решению исходной, или до выявления неограниченности линейной формы двойственной задачи, что соответствует отсутствию планов у исходной задачи. Последний случай возникает, когда при подсчете  $x_{lj} = B_l P_j$  все  $x_{lj} \geq 0$ . Тогда из соотношений (2.2) и (2.3) следует, что при любом  $\theta > 0$  мы получаем план двойственной задачи, поскольку

$$(W^0 - \theta B_l) P_j = W^0 P_j - \theta B_l P_j \leq W^0 P_j < c_j.$$

Так как  $x_l < 0$ , то значение линейной формы двойственной задачи может быть сделано сколь угодно большим. Двойственный симплексный процесс может быть применен либо в форме обычного, либо в форме модифицированного метода.

Для преодоления вырожденности в двойственной задаче Лемке [70] ввел в рассмотрение измененную двойственную задачу с ограничениями

$$W P_j \leq c_j + \epsilon^j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$



Он показал, что на основе этой задачи может быть разработан прием, аналогичный  $\epsilon$ -методу, применяемому в симплексном процессе. Для двойственной задачи мы должны установить правило, позволяющее единственным образом выбрать вектор  $P_k$ , подлежащий вводу в базис. Необходимость в таком правиле появляется в случае, когда  $\theta$ , определяемое соотношением (2.2), достигает минимума более чем при одном значении  $j^*$ ). Для этих  $j$  мы сначала подсчитываем систему отношений  $\frac{x_{ij}}{x_{1j}}$ . Если среди этих отношений минимальным является лишь одно, то вектор, подлежащий вводу в базис, определяется индексом этого отношения. Если минимум достигается при нескольких индексах, то для них подсчитываются отношения  $\frac{x_{2j}}{x_{1j}}$ , после чего описанный процесс повторяется, пока не будет выбран однозначно вводимый вектор  $P_k$ . Описанное правило дает полную гарантию от заикливания.

При изложении двойственного метода мы предполагали известным некоторый оптимальный план двойственной задачи. Это соответствует применению симплексного метода при известном исходном плане, что позволяет исключить первый этап вычислений. Основное достоинство двойственного симплексного метода заключается в том, что определение исходного плана многих задач в двойственной постановке проводится без труда. Такими, в частности, являются задачи, коэффициенты линейных форм которых неотрицательны, примером чему может служить известная задача о диете. В этих случаях планом двойственной задачи является вектор  $W=0$ . Путем незначительного изменения двойственного симплексного метода можно, отправляясь от этого плана двойственной задачи, получить решение исходной (Данциг [22]).

Для решения задач, не обладающих достаточно очевидными планами, т. е. для тех, у которых не все  $c_j \geq 0$ , было предложено несколько схем (Данциг [22] и Вайда [97]). В первой схеме все отрицательные коэффициенты линейной

---

\*) Обычно на практике для выбора вектора, подлежащего вводу в базис, пользуются следующим правилом: в базис вводится тот из подозрительных векторов, индекс которого минимален. Заметим, однако, что это правило не дает полной гарантии от заикливания.

формы принимаются равными нулю и вычисления начинаются с единичной матрицы в качестве исходного базиса. Двойственный метод с соответствующими изменениями применяется до тех пор, пока не будет достигнут оптимальный план. Полученный оптимальный (для измененной задачи) базис является базисом некоторого плана исходной задачи. После этого для решения исходной задачи можно воспользоваться обычным симплексным методом. Вторая схема представляет двойственную аналогию способа искусственного базиса. В этом случае решение задачи проводится двойственным симплексным методом в два этапа.

В качестве примера применения двойственного метода рассмотрим следующую задачу:

Минимизировать

$$x_3 + x_4 + x_5$$

при условиях

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2,$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0.$$

Двойственная к ней задача заключается в отыскании максимума линейной формы

$$-2w + w_2$$

при условиях

$$w_1 \leq 0,$$

$$w_2 \leq 0,$$

$$-w_1 - w_2 \leq 1,$$

$$w_1 - w_2 \leq 1,$$

$$-w_1 + w_2 \leq 1.$$

Исходным базисом является

$$B = (P_1 P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сводя исходные данные задачи в обычную симплексную таблицу, получаем первую часть таблицы 11.

Поскольку все элементы  $z_j - c_j$  неположительны, базис  $B$  соответствует плану двойственной задачи. Планом

двойственной задачи в этом случае является

$$W^0 = c^0 B^{-1} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0).$$

В соответствии с двойственным алгоритмом  $P_1$  подлежит исключению из базиса ( $x_1 = x_1 = -2$ ), а вектор  $P_3$  — вводу в него, поскольку

$$\theta = \frac{z_3 - c_3}{x_{13}} = \frac{z_5 - c_5}{x_{15}} = 1.$$

Получаем вторую часть таблицы 11. Поскольку все  $x_i \geq 0$ , а  $z_j - c_j \leq 0$ , определен оптимальный базис исходной и двойственной задач, состоящий из векторов  $P_2$  и  $P_3$ . Положительными компонентами решения исходной задачи являются  $x_2 = 3$  и  $x_3 = 2$ . Оптимальным планом двойственной задачи является  $(w_1 \ w_2) = (-1, 0)$ . Общее для обеих задач оптимальное значение линейной формы равно 2.

Существуют достаточно эффективные способы решения общей задачи линейного программирования, основанные на комбинированном использовании общего симплексного процесса и двойственного метода. Такими способами являются комбинированный симплексный алгоритм (Данциг [23] и Орчард-Хейс [83]) и альтернативный\*) алгоритм (Данциг,

Таблица 11  
Первая итерация

$i$	Базис	$c$		0	0	1	1	1
			$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
1	$P_1$	0	-2	1	0	-1	1	-1
2	$P_2$	0	1	0	1	-1	-1	1
3			0	0	0	-1	-1	-1

Вторая итерация

$P_3$	1	2	-1	0	1	-1	1
$P_2$	0	3	-1	1	0	-1	2
		2	-1	0	0	-2	0

\*) Этот алгоритм иногда называют *методом сокращения невязок*. (Прим. ред.)

Форд и Фулкерсон [28]). Следует указать также еще один алгоритм для решения общей задачи линейного программирования, называемый методом ведущих переменных (Бил [5]). Отметим, что при использовании всех этих алгоритмов знания исходного плана не требуется. Он определяется в процессе решения.

Все упомянутые способы тесно связаны с обычным симплексным методом. Некоторые оценки трудоемкости этих методов даны в работе Гоффмана, Манноса, Соколовского и Вигмана [61a].

Для решения задач линейного программирования существуют алгоритмы, не основанные на идеях симплексного метода. К ним относятся *метод двойного описания* (Райффа, Томпсон и Тролл [86]), численные методы для решения игр двух лиц с нулевой суммой (Браун [8] и фон Нейман [79]), релаксационный метод (Эгмон [1] и Моцкин и Шейнберг [77]) и метод проекций (Томкинс [94]). Однако эти алгоритмы менее эффективны по сравнению с группой симплексных методов.

### § 3. Применение вычислительных машин для решения задач линейного программирования

Первое успешное решение задачи линейного программирования на быстродействующей электронной вычислительной машине было проведено в январе 1952 г. в Национальном бюро стандартов. Эта задача относилась к разворачиванию и обеспечению военно-воздушных сил при определенных условиях. С того времени симплексный алгоритм (или его видоизменения) был запрограммирован для большинства средних и крупных универсальных электронных вычислительных машин.

Мы собрали от фирм, производящих вычислительные машины, данные относительно условий задач, которые решались или могут быть решены на их машинах. Эти данные включают числа  $m$  и  $n$ , задающие соответственно предельное допустимое для машины количество ограничений (уравнений) и предельное допустимое количество столбцов (переменных), а также запрограммированные для машины алгоритмы. Специальные программы для решения транспортной задачи выделены в отдельный список, где за  $m$  принимается

число пунктов отправления, а за  $n$  — количество пунктов назначения. Поскольку вычислительные машины быстро совершенствуются и постоянно улучшают технику работы, предостерегаем читателя от вывода, что приведенные данные являются окончательными и исчерпывающими. Данные, относящиеся к решению общей задачи линейного программирования и транспортной задачи, изложены в алфавитном порядке фирм, выпускающих вычислительные машины.

Вычислительные процессы для решения общей задачи линейного программирования

I. Фирма «Берроуз Корпорейшн», Электродэйт Дивижн, Пассадена, штат Калифорния. Вычислительная машина *ДАТАТРОН*. Размер задачи

$$m \leq 40; \quad n \leq 200; \quad mn \leq 3000.$$

Способ — симплексный метод с искусственным базисом.

II. Фирма «Ферранти Лимитед», Англия. Вычислительная машина *ПЕГАС*. Размер задачи

$$m \leq 30; \quad n \leq 95.$$

Способ — симплексный метод с искусственным базисом.

III. Фирма «Интернейшнл Бизнес Мэшин», Нью-Йорк.

A. Вычислительная машина *ИБМ-650*.

1. Размер задачи (включая искусственные векторы)

$$m \leq 30; \quad n \leq 50; \quad m(n+1) < 1400.$$

Способ — симплексный метод с искусственным базисом.

2. Размер задачи

$$m \leq 40; \quad n — \text{любое.}$$

Способ — модифицированный симплексный метод.

3. Размер задачи

$$m \leq 33; \quad n \leq 1000.$$

Способ — модифицированный симплексный метод. Исходный план определяется двойственным симплексным алгоритмом.

## 4. Размер задачи

$$m \leq 97; \quad n — \text{любое.}$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы.

В. Вычислительная машина *ИБМ-701*. Размер задачи

$$m \leq 99; \quad n — \text{любое.}$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы.

С. Вычислительная машина *ИБМ-702*. Размер задачи

$$m \leq 200; \quad n \leq 250.$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы.

Д. Вычислительная машина *ИБМ-704*. Размер задачи

$$m \leq 255; \quad n — \text{любое.}$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы. Программа приспособлена для решения параметрических задач.

Е. Вычислительная машина *ИБМ-705*. Размер задачи

$$m \leq 60; \quad n — \text{любое.}$$

Способ — модифицированный симплексный метод.

IV. Фирма «Сперри Рэнд Корпорейшн», Нью-Йорк.

А. Вычислительная машина *УНИВАК-1*.

1. Размер задачи

$$\begin{aligned} 1 &\leq m \leq 57, & n &< 2000; \\ 58 &\leq m \leq 117, & n &< 1000; \\ 118 &\leq m \leq 177, & n &< 660; \\ 178 &\leq m \leq 237, & n &< 500. \end{aligned}$$

Способ — симплексный метод с искусственным базисом.

2. Размер задачи

$$m \leq 178, \quad n \leq 999.$$

Способ — модифицированный метод.

В. Вычислительная машина *1103*. Размер задачи

$$m \leq 106, \quad n \leq 190, \quad m + n \leq 246.$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы.

С. Вычислительная машина *1103А*. Размер задачи

$$m \leq 242, \quad n — \text{любое}.$$

Способ — модифицированный симплексный метод с использованием мультипликативного представления обратной матрицы.

Вычислительные процессы для решения транспортной задачи\*)

І. Фирма «Ферранти Лимитед», Англия. Вычислительная машина *ПЕГАС*. Размер задачи

$$m + n \leq 128, \quad mn \leq 1024.$$

ІІ. Фирма «Интернейшнл Бизнес Мэшин», Нью-Йорк.

А. Вычислительная машина *ИБМ-650*. Размер задачи примерно

$$5m + 6n < 2300, \quad n < 100.$$

В. Вычислительная машина *ИБМ-701*. Размер задачи

$$\begin{aligned} m &\leq 199, \\ n &\leq 399, \\ m + n &\leq 426, \\ n(m + 3) &< 16\,384. \end{aligned}$$

С. Вычислительная машина *ИБМ-702*. Размер задачи

$$m \leq 349; \quad m + n \leq 700.$$

D. Вычислительная машина *ИБМ-704*. Размер задачи

$$n \leq 800; \quad m + n \leq 5500; \quad mn \leq 700\,000.$$

Е. Вычислительная машина *ИБМ-705*. Размер задачи

$$m \leq 500; \quad m + n \leq 2500.$$

---

\*) Если нет указаний о способе, то используется симплексный метод Данцига или его видоизменение Чарнеса и Купера [10].

III. Фирма «Сперри Рэнд Корпорейшн», Нью-Йорк.

А. Вычислительная машина УНИВАК-1.

1. Размер задачи

$$m + n \leq 600.$$

2. Размер задачи

$$1 \leq m \leq 30, \quad n + m < 2000;$$

$$31 \leq m \leq 60, \quad n + m < 1000;$$

$$61 \leq m \leq 90, \quad n + m < 677;$$

$$91 \leq m \leq 119, \quad n + m < 500.$$

Способ — модифицированный симплексный метод, приспособленный для решения транспортной задачи (Сузуки [93]).

3. Размер задачи

$$n \leq 180; \quad n \leq 2000.$$

Способ — метод, описанный в работе Герстенхабера и Келли [49].

В. Вычислительная машина 1103. Размер задачи

$$m + n < 8000.$$

Способ основан на методе, приведенном Сузуки [93].

### У п р а ж н е н и я

1. Составив исходный базис из векторов  $P_3, P_4, P_5$ , определить соответствующий план и в случае необходимости преобразовать систему к форме, пригодной для этапа I вычислений.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 9, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 + x_5 &= 2, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 &= 5, \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Решить следующую задачу двойственным симплексным методом:

Максимизировать

$$7x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 + x_2 &+ x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 &- 3x_4 + x_6 = 12, \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$


---



## ЧАСТЬ III

# ПРИЛОЖЕНИЯ

---

### ГЛАВА 10

## ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Одной из первых проблем, для исследования которых были с успехом применены методы линейного программирования, явилась транспортная задача. Поставленная первоначально Хичкоком [57], транспортная задача позднее была детально разобрана Купмансом [66]. Формулировка ее как задачи линейного программирования и методы решения впервые были даны Данцигом [18]\*). Предложенный им вычислительный процесс является детализацией симплексного метода применительно к транспортной задаче. В дальнейшем мы коснемся метода Данцига, не вдаваясь, однако, в подробное его обсуждение. Отсылаем читателя, желающего познакомиться с этим методом в деталях, к работе Данцига [18]. Другой процесс для решения задачи транспортировки предложен Фордом и Фулкерсоном [43].

В связи с большой практической важностью транспортной задачи в эту главу включено несколько основных теорем, касающихся системы ее условий. Чтобы не отвлекаться от главной цели, заключающейся в постановке и решении транспортной проблемы, доказательства некоторых теорем опускаются. При первом чтении рекомендуем читателю обратиться к приложениям, описанным в § 2 гл. 1.

### § 1. Общая транспортная задача

Однородный продукт, сосредоточенный в  $m$  пунктах отправления в количествах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из  $n$  пунктов назначения

---

\*) Аналогичный метод решения транспортной задачи (метод потенциалов) был опубликован Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1949 г. [5р]. (Прим. ред.)

в количествах  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения равна  $c_{ij}$  и известна для всех комбинаций  $(i, j)$ . Пусть  $x_{ij}$  — количество продукта, перевозимого по маршруту  $(i, j)$ . Задача заключается в определении таких величин  $x_{ij}$  для всех маршрутов  $(i, j)$ , при которых суммарная стоимость перевозок была бы минимальной.

Условия транспортной задачи запишем в виде таблицы 12. Здесь количество продукта, перевозимого из  $i$ -го пункта

Таблица 12

		Пункты назначения						
		$i \backslash j$	1	2	...	$j$	...	$n$
Пункты отправления	1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
	2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
	.	.	.	...	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	...	.	.
	$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$a_i$
	.	.	.	...	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	...	.	.
	$m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mn}$	$a_m$
		$b_1$	$b_2$	...	$b_j$	...	$b_n$	

отправления в  $j$ -й пункт назначения, равно  $x_{ij}$ ; запас продукта в  $i$ -м пункте отправления измеряется величиной

$$a_i \geq 0,$$

и общая потребность  $j$ -го пункта назначения в доставляемом продукте равна

$$b_j \geq 0.$$

Предположим временно, что общий запас продукта в пунктах отправления равен суммарной потребности в этом продукте пунктов назначения, т. е. что

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = A.$$

Общая стоимость перевозки  $x_{ij}$  единиц продукта равна  $c_{ij}x_{ij}$ . Поскольку отрицательные перевозки не имеют реального смысла для данной задачи, будем предполагать, что  $x_{ij} \geq 0$ .

Дадим теперь математическую формулировку транспортной задачи:

Определить значения переменных  $x_{ij}$ , которые минимизируют стоимость перевозок

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (1.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2) получаются из строк таблицы 12, уравнения (1.3) — из столбцов этой таблицы. Для совместности уравнений (1.2) и (1.3) необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_i a_i = \sum_j b_j = A.$$

Отметим здесь, что задача (1.1) — (1.4) является задачей линейного программирования с  $m + n$  уравнениями и  $mn$  переменными.

**Теорема 1.** *Для любой транспортной задачи существует план.*

Доказательство. Поскольку  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A$ , величины

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

составляют план рассматриваемой задачи. Действительно,

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{A} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^m a_i}{A} = b_j.$$

Следовательно, система величин  $x_{ij}$ , удовлетворяя всем условиям транспортной задачи, является ее планом.

Выпишем для  $m=3$  и  $n=5$  уравнения, соответствующие (1.2) и (1.3). Мы получим тогда следующие восемь (т. е.  $m+n$ ) уравнений с 15 (т. е.  $mn$ ) неизвестными:

a)	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}$	$= a_1,$
b)	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}$	$= a_2,$
c)	$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35}$	$= a_3,$
d)	$x_{11} \quad \quad \quad + x_{21} \quad \quad \quad + x_{31}$	$= b_1,$
e)	$\quad x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} \quad \quad \quad + x_{32}$	$= b_2,$
f)	$\quad \quad x_{13} \quad \quad \quad + x_{23} \quad \quad \quad + x_{33}$	$= b_3,$
g)	$\quad \quad \quad x_{14} \quad \quad \quad + x_{24} \quad \quad \quad + x_{34}$	$= b_4,$
h)	$\quad \quad \quad \quad x_{15} \quad \quad \quad + x_{25} \quad \quad \quad + x_{35}$	$= b_5.$

Если мы сложим уравнения d) — h) и вычтем из результата уравнения b) и c), то получим уравнение a). Последнее, следовательно, является лишним и нет необходимости включать его в систему. Обобщая, можно заключить, что одно уравнение из системы (1.2) или (1.3) можно исключить, в результате чего транспортная задача сводится к  $m+n-1$  независимым уравнениям с  $mn$  переменными. Для выписанных

уравнений получаем следующую укороченную матрицу (здесь из системы (1.2) исключено первое уравнение):

$$A = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

и

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

Вектор  $P_{ij}$  соответствует переменной  $x_{ij}$ . Обозначим через

$$X = (x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$$

вектор-столбец,  $mn$  компонент которого совпадают с величинами перевозок  $x_{ij}$ , а через

$$c = (c_{11}, \dots, c_{ij}, \dots, c_{mn})$$

вектор-строку с компонентами, равными стоимостям перевозок  $c_{ij}$ . Приводим формулировку транспортной задачи к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} AX &= P_0, \\ X &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$cX$  — минимум.

Из результатов гл. 3 и 4 следует, что оптимальный план задачи может быть составлен не более чем из  $m + n - 1$  положительных перевозок  $x_{ij}$ .

**Теорема 2.** (Построение исходного опорного плана.) *Существует план, содержащий не более чем  $m + n - 1$  положительных перевозок  $x_{ij}$ . При этом система векторов  $P_{ij}$ , соответствующих таким перевозкам  $x_{ij}$ , линейно независима.*

Конструктивным доказательством теоремы может послужить процесс получения первого опорного плана, предложенный Данцигом [18] и названный Чарнесом и Купером [10] «правилом северо-западного угла». Применим это правило к следующей таблице:

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$a_1$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

Определим сначала значение переменной  $x_{11}$ , стоящей в верхнем левом углу. Пусть  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ ; если  $a_1 \leq b_1$ , то  $x_{11} = a_1$  и все  $x_{1j} = 0$  для  $j = 2, 3, 4$ . Если  $a_1 \geq b_1$ , то  $x_{11} = b_1$  и все  $x_{i1} = 0$  для  $i = 2, 3$ . Для определенности допустим, что справедливо первое предположение; тогда таблица преобразуется, как показано ниже в шаге 1. Здесь общее количество продукта, вывозимого из первого пункта отправления, уменьшается до нуля, а общее количество, которое необходимо подвезти к первому пункту назначения, равно  $b_1 - a_1$ .

Шаг 1. Примем  $b_1 > a_1$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
$b_1 - a_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

После этого определяем значение первой переменной во второй строке. Пусть  $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$ . Если допустить, что  $a_2 > b_1 - a_1$ , то  $x_{21} = b_1 - a_1$  и  $x_{31} = 0$ . Это показано в шаге 2. Количество продукта, которое осталось перевезти

из пункта отправления 2, теперь равно  $a_2 - b_1 + a_1$ ; потребность первого пункта назначения полностью удовлетворена.

Шаг 2. Допустим, что  $a_2 > b_1 - a_1$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2 - b_1 + a_1$
0	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

Подобным же образом в зависимости от допущений, указанных далее, получаем следующие шаги. В каждом из них определяется значение переменной  $x_{ij}$  и сводится к нулю либо запас  $i$ -го пункта отправления, либо потребность  $j$ -го пункта назначения, или и то и другое вместе.

Шаг 3. Положим  $a_2 - b_1 + a_1 > b_2$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2 - b_1 + a_1 - b_2$
0	0	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	0	$b_3$	$b_4$	

Шаг 4. Допустим, что  $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	$x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2$	0	0
0	0	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	0	$b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$	$b_4$	

Из шага 4 видно, что  $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$  и  $x_{34} = b_4$ . Следует отметить, что каждая из перевозок  $x_{ij}$  была получена прибавлением и вычитанием различных комбинаций  $a_i$  и  $b_j$ . Поэтому если  $a_i$  и  $b_j$  были первоначально неотрицательными целыми числами, то и план, получаемый в результате описанного выше процесса, будет состоять из неотрицательных целых чисел. Нетрудно видеть, что этот план может содержать самое большее  $m + n - 1$  положительных перевозок. При наших предположениях относительно величин  $a_i$  и  $b_j$  и допущениях, сделанных при построении плана в рас-

смотренном примере с тремя пунктами отправления и четырьмя пунктами назначения, положительными перевозками являются:

$$\begin{aligned}x_{11} &= a_1, & x_{21} &= b_1 - a_1, \\x_{22} &= b_2, & x_{23} &= a_2 - b_1 + a_1 - b_2, \\x_{33} &= b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2, & x_{34} &= b_4.\end{aligned}$$

Используя приведенный алгоритм построения плана, читатель может доказать линейную независимость системы векторов, отвечающих выписанным положительным перевозкам. Тем самым будет установлено, что построенный план является опорным.

Продemonстрируем теперь правило «северо-западного угла» на двух числовых примерах.

Пример 1.

$$\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 2 & 2 & \end{array}$$

Пример 2.

$$\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & \end{array}$$

В примере 2 положительными оказались лишь  $m + n - 2 = 6$  перевозок. Таким образом, полученный опорный план оказывается вырожденным. Это будет случаться всякий раз, когда после нескольких шагов количество продукта, которое осталось вывезти из  $i$ -го пункта отправления, равно в точности количеству продукта, которое осталось подвезти к  $j$ -му пункту назначения, за исключением случая, когда одновременно  $i = m$  и  $j = n$ . В примере 2 это имеет место для  $x_{23} = \min(a_2 - x_{22}, b_3) = (3, 3) = 3$ .

С каждым планом, полученным с помощью правила «северо-западного угла», связана система  $m + n - 1$  линейно независимых векторов. В примере 1 векторами, связанными с положительными  $x_{ij}$ , являются  $P_{11}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{33}, P_{34}, P_{35}$ .



Обозначим через  $B$  базис, образованный этими векторами. Тогда решение системы  $BX = P_0$  должно совпадать с планом, получаемым по правилу «северо-западного угла». Здесь  $X = (x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{35})$  — вектор-столбец. Подобным же образом выбирается соответствующая система  $m + n - 1$  линейно независимых векторов для вырожденного плана в примере 2. Это будет рассмотрено ниже. Планы, получаемые по правилу «северо-западного угла» (и подобным схемам), являются опорными. Напомним в связи с этим, что оптимальный план задачи может быть выбран из совокупности ее опорных планов.

Поскольку фактически во всех применениях транспортной задачи рассматриваются перевозки целого числа единиц продукта, полезно установить следующее ее важное свойство:

**Теорема 3.** Если предположить, что все  $a_i$  и  $b_j$  — неотрицательные целые числа, то любой опорный план составляется из целых перевозок.

Докажем теорему 3 с помощью следующего утверждения:

**Лемма 1.** Каждую систему из  $m + n - 1$  линейно независимых векторов транспортной задачи можно расположить в виде треугольной матрицы.

Для иллюстрации этого утверждения перестроим в треугольную матрицу базис примера 1. Исходная система  $BX = P_0$  имеет такой вид:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \\ \text{c)} \\ \text{d)} \\ \text{e)} \\ \text{f)} \\ \text{g)} \end{array} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ x_{11} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для перестановки базиса  $B$  необходимо лишь поменять местами его строки и соответствующие компоненты  $P_0$ , как показано ниже. Поскольку это преобразование не связано с перестановками столбцов матрицы  $B$ , компоненты век-

тора  $X$  не меняют своего порядка. Преобразованная система имеет такой вид:

$$\begin{array}{l}
 P_{11} \quad P_{21} \quad P_{22} \quad P_{23} \quad P_{33} \quad P_{34} \quad P_{35} \quad X \quad P_0 \\
 \begin{array}{l}
 \text{с)} \\
 \text{а)} \\
 \text{д)} \\
 \text{е)} \\
 \text{б)} \\
 \text{ф)} \\
 \text{г)}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_{11} \\
 x_{21} \\
 x_{22} \\
 x_{23} \\
 x_{33} \\
 x_{34} \\
 x_{35}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 3 \\
 4 \\
 2 \\
 4 \\
 7 \\
 2 \\
 2
 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Из системы уравнений, соответствующей полученной треугольной матрице, немедленно следует, что  $x_{35} = 2$  и  $x_{34} = 2$ . Подставив эти значения в уравнение б), получаем  $x_{33} = 3$ . Решив подобным образом уравнения е), д), а) и с), получим  $x_{23} = 1$ ,  $x_{22} = 2$ ,  $x_{21} = 1$  и  $x_{11} = 2$ . Поскольку матрица, связанная с опорным планом, имеет треугольную структуру и все элементы ее равны либо 0, либо 1, решение системы уравнений, определяемой этой матрицей, требует только сложения и вычитания. Следовательно, значения переменных будут целыми числами.

**Теорема 4.** *Любая транспортная задача обладает оптимальным планом.*

**Доказательство.** Согласно теореме 1 задача обладает хотя бы одним планом. Поскольку коэффициенты в уравнениях (1.2) и (1.3) и величины  $a_i$ ,  $b_j$  неотрицательны и конечны, все  $x_{ij}$  ограничены сверху. Действительно,  $x_{ij}$  не может быть больше, чем соответствующие  $a_i$  или  $b_j$ . (Здесь можно отметить, что для любого опорного плана по крайней мере одна  $x_{ij}$  равна своей соответствующей  $a_i$  или  $b_j$ .) Таким образом, множество планов задачи непусто и ограничено. Следовательно, задача разрешима, т. е. задача имеет оптимальный план. Если  $a_i$  и  $b_j$  — целые числа, то оптимальный опорный план состоит из целочисленных перевозок.

Систему  $m + n - 1$  уравнений с  $mn$  переменными можно, разумеется, решить с помощью обычного симплексного метода. Однако даже при малых значениях  $m$  и  $n$  получающаяся в результате система уравнений громоздка и неудобна для ручных вычислений. Может оказаться, что такие системы

будут слишком велики даже для решения на вычислительных машинах. Эта трудность устраняется путем видоизменения симплексного алгоритма применительно к транспортной проблеме. Для начала соответствующего итеративного процесса необходимо иметь опорный план задачи. Мы знаем, что векторы, связанные с переменными опорного плана, линейно независимы. Если опорный план невырожден, то он удовлетворяет требованиям процесса. Это перестает быть верным для вырожденных планов таких, как в случае примера 2. Если вырожденный опорный план содержит  $k < m + n - 1$  положительных переменных, то необходимо дополнительно выбрать  $m + n - 1 - k$  нулевых переменных.  $m + n - 1 - k$  векторов, связанных с этими нулевыми переменными, и  $k$  векторов, связанных с положительными переменными, должны быть линейно независимы. Указанный выбор может быть произведен с помощью  $\epsilon$ -приема для транспортной задачи (Данциг [18]).

Обратимся к таблице, использованной для получения первого плана по правилу «северо-западного угла». Если на шаге 1

$$x_{21} = b_1 - a_1 = a_2,$$

то ни  $x_{31}$ , ни  $x_{22}$  не могут быть положительны. Аналогично, если на шаге 2

$$x_{22} = b_2 = a_2 - b_1 + a_1,$$

то положительными не могут быть ни  $x_{32}$ , ни  $x_{23}$ . Каждый раз, когда возникает подобная ситуация, число положительных переменных в опорном плане уменьшается на единицу. Такие вырожденные случаи возникают тогда, когда сумма нескольких (не всех) величин  $a_i$  совпадает с суммой нескольких величин  $b_j$ . В примере 2 вырожденный план был получен вследствие того, что

$$x_{23} = \min(b_3, a_2 - b_2 + a_1 - b_1) \text{ и } b_3 = a_2 - b_2 + a_1 - b_1 = 3.$$

Для избежания вырожденных ситуаций необходимо обеспечить неравенство частных сумм, составленных из величин  $a_i$  и  $b_j$ . Этого можно добиться с помощью небольшого

изменения значений  $a_i$  и  $b_j$ . Введем новую задачу, для которой

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= a_i + \varepsilon, & i &= 1, 2, \dots, m; \\ \bar{b}_j &= b_j, & j &= 1, 2, \dots, n-1; \\ \bar{b}_n &= b_n + m\varepsilon; \\ \varepsilon &> 0.\end{aligned}$$

Число  $\varepsilon$  выбирается достаточно малым, таким, чтобы окончательный план, округленный до последней значащей цифры величин  $a_i$  и  $b_j$ , удовлетворял условиям исходной задачи. Это возможно, ибо вычислительный процесс состоит только из сложений и вычитаний. Орден [84] показал, что указанному условию удовлетворяет любое  $\varepsilon < \frac{\delta}{2m}$ , где  $\delta$  — единица последнего значащего разряда  $a_i$  и  $b_j$ . Практически  $\varepsilon$  берется равным  $1 \cdot 10^{-d}$ , где  $d$  определяется по величине  $\frac{\delta}{2m}$ .

Применив  $\varepsilon$ -процесс к примеру 2, получим план

1	2	$+\varepsilon$	0	0	0	3	$+\varepsilon$
0	1	$-\varepsilon$	3	$2\varepsilon$	0	4	$+\varepsilon$
0	0		0	2	$-2\varepsilon$	5	$+3\varepsilon$
1	3		3	2	$5+3\varepsilon$		

Опорный план теперь содержит  $x_{24} = 2\varepsilon > 0$ . Таким образом,  $\varepsilon$  определяет, какую из двух переменных, имеющих нулевые значения, надо ввести в план. В данном случае необходимо было произвести выбор между  $x_{24}$  и  $x_{33}$ .  $\varepsilon$ -процесс устраняет необходимость такого выбора и дает возможность проводить вычисления без каких-либо вырожденных планов. Теоретически выбор либо  $x_{24}$ , либо  $x_{33}$  будет порождать базис из  $m + n - 1$  векторов. Как будет показано, для вычислительного процесса важно лишь знать, какая из нулевых переменных вводится в опорный план. Можно было бы обойтись без  $\varepsilon$ -процесса, выбирая любую из двух нулевых переменных. Представляется целесообразным выбирать переменную с меньшим  $c_{ij}$ . Что касается опасности заикливания, то заметим, что в настоящее время не известно ни одной транспортной задачи, приводящей к циклу.

## § 2. Метод решения транспортной задачи

Как показал Данциг [18], для любого опорного плана могут быть найдены такие числа  $u_i$  и  $v_j$ , что для всех переменных  $x_{ij}$  опорного плана, соответствующих векторам базиса, имеет место равенство

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Данциг показал также, что если

$$u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$$

для переменных, не входящих в опорный план, и если все разности

$$\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0,$$

то опорный план является оптимальным. Если же это условие оптимальности не выполняется, то легко может быть получен новый опорный план, связанный с меньшим, чем предыдущий, значением линейной формы (задача здесь предполагается невырожденной). Вычислительный процесс Данцига дает возможность получать опорный план без составления обычной симплексной таблицы и исследовать его на оптимальность, т. е. вычислять  $z_{ij} = \bar{c}_{ij}$  без предварительного разложения векторов, не входящих в базис, по векторам этого базиса. Теоретическое рассмотрение этого метода дано в работах Гендерсона и Шлейфера [55] и Чарнеса и Купера [10]. Здесь этот процесс будет проиллюстрирован на числовом примере.

Имеются три пункта отправления, в которых сосредоточено  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 8$  и  $a_3 = 10$  единиц однородного продукта соответственно, и четыре пункта назначения с потребностями  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 6$ ,  $b_3 = 8$  и  $b_4 = 6$  единиц. Заметим, что

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 24.$$

Стоимости перевозок между каждым пунктом отправления и каждым пунктом назначения задаются следующей таблицей:

		Пункты назначения				
		1	2	3	4	
Пункты отправления	1	1	2	3	4	$= (c_{ij})$
	2	4	3	2	0	
	3	0	2	2	1	

Например, стоимость перевозки одной единицы между пунктом отправления 3 и пунктом назначения 2 равна  $c_{32} = 2$ . В общем случае  $c_{ij}$  могут быть произвольными действительными числами. Применяя правило «северо-западного угла», получаем исходный план:

$(x_{ij}) =$	4	2	0	0	6
	0	4	4	0	8
	0	0	4	6	10
					4    6    8    6

где  $x_{11} = 4$ ,  $x_{12} = 2$ ,  $x_{22} = 4$ ,  $x_{23} = 4$ ,  $x_{33} = 4$ ,  $x_{34} = 6$  и все другие  $x_{ij} = 0$ . Значение линейной формы равно 42. Поскольку полученный опорный план является невырожденным, применение  $\epsilon$ -приема излишне. В данном примере мы ориентируемся на ручные вычисления, поэтому вырожденные ситуации имеет смысл разрешать, не применяя этого способа. При наличии вырожденной ситуации из базиса будет выводиться тот вектор из числа «подозрительных», которому соответствует наибольшее значение  $c_{ij}$ . В примере мы сможем продемонстрировать это правило. В каждом плане будет отмечаться ровно  $m + n - 1$  неотрицательных

переменных, соответствующих векторам базиса. Если задача подлежит решению на электронной вычислительной машине, может оказаться более эффективным использовать при вычислениях  $\epsilon$ -прием.

Определим для положительных переменных опорного плана  $m$  чисел  $u_i$  и  $n$  чисел  $v_j$  таких, что

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_1 &= c_{11} = 1, \\ u_1 + v_2 &= c_{12} = 2, \\ u_2 + v_2 &= c_{22} = 3, \\ u_2 + v_3 &= c_{23} = 2, \\ u_3 + v_3 &= c_{33} = 2, \\ u_3 + v_4 &= c_{34} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь шесть (т. е.  $m + n - 1$ ) уравнений содержат семь переменных. Поскольку система (2.1) является неопределенной системой линейных уравнений (т. е. число неизвестных превышает число уравнений), она имеет бесчисленное множество решений. Определим одно из них, произвольно приняв некоторую из переменных равной соответствующему ей  $c_{ij}$ . Этим число неизвестных будет уменьшено на единицу, что позволит их однозначно определить.

Пусть в (2.1)  $u_1 = 1$ ; тогда систему легко решить для оставшихся  $u_i$  и  $v_j$ . Если  $u_1 = 1$ , то  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 1$ ; поскольку  $v_2 = 1$ ,  $u_2 = 2$ . Аналогично получаем  $v_3 = 0$ ,  $u_3 = 2$  и  $v_4 = -1$ . Эти вычисления удобно проводить с помощью следующей таблицы, содержащей стоимости перевозок (жирный шрифт), соответствующие положительным переменным опорного плана:

$u \backslash v$				
	1	2		
		3	2	
			2	1

Принимая  $u_1 = 1$ , подсчитываем по указанному выше правилу  $u_i$  и  $v_j$  и располагаем их в соответствующих позициях таблицы:

$u \backslash v$	0	1	0	-1
1	1	2		
2		3	2	
2			2	1

Поскольку все уравнения системы (2.1) удовлетворяются, имеем

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

для всех  $x_{ij}$ , входящих в опорный план. Далее, для всех комбинаций  $(i, j)$  подсчитываются величины

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j$$

и помещаются в соответствующие им клетки таблицы косвенных стоимостей перевозок ( $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$  для всех положительных  $x_{ij}$  рассматриваемого плана). Таблица косвенных стоимостей ( $\bar{c}_{ij}$ ) для исходного плана имеет такой вид:

$$(\bar{c}_{ij}) =$$

1	2	1	0
2	3	2	1
2	3	2	1

Например,

$$\bar{c}_{14} = u_1 + v_4 = 0.$$

Как будет показано ниже, рассмотренные три элементарных этапа можно объединить в один. Подсчитаем разности  $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ . Если все

$$\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0,$$



то рассматриваемый план является оптимальным. Если же по крайней мере одна из разностей  $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$ , то решение задачи еще не получено. В этом случае можно легко получить новый опорный план, включающий переменную, связанную с  $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$ . Как и в обычном симплексном процессе, для введения в новый базис выбирается вектор, соответствующий  $\max(\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0)$ . При этом образуется новый опорный план, связанный с уменьшенным значением линейной формы (в случае вырожденности предшествующего плана значение линейной формы может не измениться).

Для рассматриваемого плана имеем

$$\max(\bar{c}_{ij} - c_{ij}) = \bar{c}_{31} - c_{31} = 2.$$

Следовательно, для ввода в новый опорный план выбирается  $x_{31}$ . В случае неоднозначности выбирается переменная, соответствующая наименьшему  $c_{ij}$ . Обратившись к матрице первого опорного плана ( $x_{ij}$ ), вводим в него перевозку  $x_{31}$  с некоторой неизвестной неотрицательной интенсивностью  $\theta_1$ . Так как суммы элементов строк и столбцов должны быть равны соответствующим значениям  $a_i$  и  $b_j$ , необходимо следующим образом прибавить или вычесть  $\theta_1$  из некоторых других  $x_{ij}$  первого плана:

$4 - \theta_1$	$2 + \theta_1$			6
	$4 - \theta_1$	$4 + \theta_1$		8
$\theta_1$		$4 - \theta_1$	6	10
4	6	8	6	

Поскольку перевозка  $x_{31}$  увеличивается на  $\theta_1 \geq 0$ , необходимость удовлетворения условиям задачи приводит к тому, что  $\theta_1$  следует вычесть из  $x_{11}$ ,  $x_{32}$  и  $x_{33}$  и прибавить к  $x_{12}$  и  $x_{23}$ . Очевидно, что величина  $\theta_1$  ограничивается теми  $x_{ij}$ , из которых она вычитается.  $\theta_1$  не может превышать наименьшую из этих перевозок. В данном случае для сохранения неотрицательности компонент плана  $\theta_1$  должно быть неотрицательным числом, не превышающим 4. Поскольку мы хотим

исключить одну из переменных из старого плана и ввести в него  $x_{31}$ , принимаем  $\theta_1 = 4$ . Однако в силу того, что  $x_{11} - \theta_1 = x_{32} - \theta_1 = x_{33} - \theta_1 = 4 - \theta_1$ , обратятся в нуль одновременно три компоненты плана. Таким образом, получаем вырожденный план с четырьмя положительными компонентами. Для того, чтобы иметь план, содержащий точно  $m + n - 1$  неотрицательных компонент, сохраняем две нулевые перевозки. Перевозки  $x_{11}$  и  $x_{33}$  оставлены потому, что они соответствуют меньшим значениям  $c_{ij}$ . Полученный план записывается в виде такой таблицы:

$$(x_{ij}) =$$

0	6			6
		8		8
4		0	6	10
4	6	8	6	

Значение линейной формы для этого плана равно

$$42 - [\max(\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0)] \theta_1 = 42 - (2)(4) = 34.$$

Набор  $(u_i, v_j)$  и матрица  $(\bar{c}_{ij})$  для полученного плана сведены в следующую таблицу:

$u \backslash v$	0	1	2	1
1	1	2	3	2
0	0	1	2	1
0	0	1	2	1

$$= (\bar{c}_{ij}),$$

где цифры, набранные жирным шрифтом, соответствуют  $c_{ij}$ , отвечающим векторам базиса. Очевидно, что

$$\max(\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0) = \bar{c}_{24} - c_{24} = 1.$$

Вводя  $\theta_2$  в клетку (2,4), нужно следующим образом прибавить и вычесть  $\theta_2$  из  $x_{ij}$ :

0	6			6
		$8 - \theta_2$	$\theta_2$	8
4		$0 + \theta_2$	$6 - \theta_2$	10
4	6	8	6	

Получаем  $\theta_2 = 6$ ;  $x_{34}$  исключается из плана и  $x_{24}$  вводится в него при значении, равном  $\theta_2 = 6$ . Новое значение линейной формы равно

$$34 - (\bar{c}_{24} - c_{24})\theta_2 = 34 - (1)(6) = 28.$$

Новый план имеет такой вид:

$(x_{ij}) =$	0	6			6
			2	6	8
	4		6		10
	4	6	8	6	

Соответствующая запись таблицы  $(u_i, v_j)$  и матрицы  $(\bar{c}_{ij})$  имеет такой вид:

$(\bar{c}_{ij}) =$	$\begin{array}{c cccc} & v & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline u & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$	0	1	2	0
	1	1	2	3	1
	0	0	1	2	0
	0	0	1	2	0

Здесь все  $\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0$  и этот последний вырожденный план ( $x_{11}=0$ ,  $x_{12}=6$ ,  $x_{23}=2$ ,  $x_{24}=6$ ,  $x_{31}=4$ ,  $x_{33}=6$  и все другие  $x_{ij}=0$ ) является оптимальным. Значение линейной формы равно 28. Отметим, что  $\bar{c}_{13} - c_{13} = 0$ , а  $x_{13}$  в план не входит. Поэтому  $x_{13}$  можно ввести в план и получить другое решение. Подставляя  $\theta_3$  в клетку (1.3), получаем:

$0 - \theta_3$	6	$\theta_3$		6
		2	6	8
$4 + \theta_3$		$6 - \theta_3$		10
4	6	8	6	

Имеем тогда при  $x_{13} = \theta_3 = 0$  новый вырожденный оптимальный план:

$(x_{ij}) =$		6	0		6
			2	6	8
	4		6		10
	4	6	8	6	

Разумеется, значение линейной формы осталось равным 28. Заметим, что в данном случае компоненты плана не изменились, поскольку  $\theta_3 = 0$ .

Иногда возникают ситуации, когда суммарные запасы пунктов отправления  $\sum_i a_i$  меньше общей потребности пунктов назначения  $\sum_j b_j$ . В этом случае всех потребностей,

конечно, удовлетворить нельзя. Однако и здесь можно составить план перевозок, соответствующий минимальным транспортным издержкам. Допустим, что имеется некоторый фиктивный пункт отправления, в котором сосредоточено

$$\sum_j b_j - \sum_i a_i > 0$$

единиц однородного продукта. Стоимости перевозок между фиктивным, или  $(m+1)$ -м, пунктом отправления и пунктами назначения принимаются равными нулю. Если первоначальная задача имела размеры  $3 \times 4$ , размеры новой задачи  $4 \times 4$ . Эта задача может быть решена подобно любой другой транспортной задаче:

		Пункты назначения				
		1	2	3	4	
Пункты отправления	1	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$	$a_2$
	3	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$	$a_3$
	4	0	0	0	0	$\sum_j b_j - \sum_i a_i$
		$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

Здесь все  $c_{m+1, j} = c_{4j} = 0$ .

Если имеет место противоположное неравенство

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j,$$

расширенная задача составляется аналогично. В этом случае вводится фиктивный пункт назначения, потребности которого измеряются величиной  $\sum_i a_i - \sum_j b_j$ . Стоимости перевозок в этот фиктивный пункт опять берутся равными нулю.

Задача  $3 \times 4$  сводится в этом случае к обычной транспортной задаче размера  $3 \times 5$ :

		Пункты назначения					
		1	2	3	4	5	
Пункты отправления	1	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	0	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$	0	$a_2$
	3	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$	0	$a_3$
		$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$(\sum_i a_i - \sum_j b_j)$	

При решении любой задачи линейного программирования можно, вообще говоря, ожидать, что общее число необходимых итераций зависит от того, насколько первый план близок к оптимальному. Поскольку в правиле «северо-западного угла» значение  $c_{ij}$  не учитывается, нельзя ожидать, что при вычислении исходного плана по этому правилу соответствующее значение линейной формы будет близким к минимальному. Было предложено несколько других методов, которые можно применить для машинных вычислений. Продемонстрируем три из них на примере, заимствованном из работы Данцига [18]:

3	2	1	2	3	1
5	4	3	— 1	1	5
0	2	3	4	5	7
3	3	3	2	2	

В этом примере правило «северо-западного угла» приводит к плану, связанному с значением линейной формы, равным 52.

а) *Правило минимума по строке.* Пусть минимальным элементом первой строки будет  $c_{1k}$  (если минимальных элементов имеется более одного, то выбираем элемент с наименьшим индексом  $j$ ). Положим  $x_{1k} = a_1$ , если  $a_1 \leq b_k$ ;  $x_{1k} = b_k$ , если  $a_1 > b_k$ . В первом случае полагают  $x_{ik} = 0$  для  $i \neq k$  и переходят ко второй строке, заменяя  $b_k$  на  $b_k - a_1$ . После этого находят минимальный элемент второй строки и повторяют процесс. Во втором случае заменяют  $a_1$  на  $a_1 - b_k$ ,  $b_k$  — на нуль и определяют наименьший за вычетом  $c_{1k}$  элемент первой строки, после чего описанный процесс повторяется. Используя это правило, получаем исходный план вида

$$(x_{ij}) =$$

		1			1
		1	2	2	5
3	3	1			7
3	3	3	2	2	

Этот план является оптимальным; соответствующее значение линейной формы равно 13.

б) *Правило минимума по столбцу.* Вычисление исходного плана проводится по правилу, описанному выше, с той разницей, что строки заменяются столбцами. Это правило приводит к плану

$$(x_{ij}) =$$

		1			1
		2	2	1	5
3	3			1	7
3	3	3	2	2	

при значении линейной формы, равном 17.

с) *Правило минимального элемента матрицы.* Отыскивается минимальный элемент  $c_{ij}$  матрицы стоимостей перевозок, после чего величина перевозки  $x_{ij}$  полагается равной

$\min(a_i, b_j)$ . Процесс повторяется до тех пор, пока весь продукт не будет перевезен. Применяв это правило к предшествующему примеру, получим оптимальный план, совпадающий с решением, полученным по правилу а).

Хотя приведенные правила приводят к хорошим результатам в данном частном примере, в общем случае это может быть и не так. Можно сформулировать транспортные задачи, в которых правило «северо-западного угла» приводит к плану перевозок лучшему, чем планы, найденные с помощью описанных способов. Однако опыт показал, что в большинстве случаев использование изложенных способов отыскания первого приближения ведет к уменьшению общего числа итераций, необходимых для решения задачи. Это обстоятельство особенно важно при решении транспортных задач с большим числом пунктов отправления и назначения.

### § 3. Видоизменения транспортной задачи

А\*). Задача о назначении персонала\*\*). Концерну необходимо заполнить три вакансии, связанные с различными квалификациями. На эти вакансии имеются три претендента, каждый из которых может занять любое вакантное место с одной и той же оплатой труда. Однако вследствие различия в способностях, образовании и опыте полезность каждого кандидата для компании зависит от должности, на которую он назначается. Годовые доходы компании от каждого кандидата, принятого на одну из трех вакантных должностей, записаны ниже:

		Должности		
		1	2	3
Кандидаты	1	5	4	7
	2	6	7	3
	3	8	11	2

\*) Материал этого пункта заимствован из работы Двайера [41].

\*\*) В отечественной литературе эта задача называется проблемой выбора. (Прим. ред.)



Желательно таким путем назначить кандидатов на должности, чтобы общий доход компании был максимальным. В данной задаче имеются  $3! = 6$  возможных вариантов назначений. Нам необходимо определить характеристики  $x_{ij}$  назначений  $i$ -го кандидата на  $j$ -ю должность,  $i, j = 1, 2, 3$ . Полагаем при этом, что  $x_{ij}$  может принимать значения либо 0, либо 1. Равенство характеристики назначения нулю означает, что  $i$ -й кандидат не назначен на  $j$ -ю должность. Характеристика назначения, равная 1, указывает на принятие  $i$ -го кандидата на  $j$ -ю должность. Поскольку каждого претендента можно назначить только на одну должность и, наоборот, каждая должность может быть занята только одним работником,

$$\sum_j x_{ij} = 1, \quad \sum_i x_{ij} = 1.$$

Если принять, что доход концерна от  $i$ -го работника, назначенного на  $j$ -ю должность, измеряется величиной  $c_{ij}$ , то рассматриваемый пример сводится к следующей задаче линейного программирования:

Максимизировать

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Эта задача сводится к обычной транспортной задаче, состоящей в минимизации

$$- \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

при тех же ограничениях на переменные  $x_{ij}$ . Поэтому она может быть решена с помощью методов, разработанных для транспортной задачи.

Часто имеется много идентичных должностей, требующих одинаковой основной квалификации. Такие должности могут быть объединены в одну общую должностную категорию. Предположим, что имеется  $n$  таких категорий, и обозначим через  $b_j$  число вакантных мест в  $j$ -й категории. Если различным лицам соответствуют идентичные или приблизительно одинаковые значения  $c_{ij}$  по всем категориям должностей, то этих лиц естественно сгруппировать в одну категорию личного состава. Допустим, что таких категорий имеется  $m$ , и обозначим через  $a_i$  число лиц в  $i$ -й категории личного состава. Тогда общая задача о назначении персонала формулируется следующим образом:

Найти минимум

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Здесь  $x_{ij}$  — характеристика назначения, принимающая значение либо нуля, либо положительного целого числа, совпадает с количеством лиц  $i$ -й категории личного состава, назначенных на должности  $j$ -й категории. Подразумевается, что общее число имеющихся в распоряжении должностей равно общему числу назначаемых лиц, т. е.  $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ . Если  $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ , в задачу вводится фиктивная категория личного состава, содержащая  $\sum_j b_j - \sum_i a_i$  лиц. Когда  $\sum_j b_j < \sum_i a_i$ , используется фиктивная должностная категория, состоящая из  $\sum_i a_i - \sum_j b_j$  должностей.

Двайер [41] и Вото совместно с Орденем [97а] предложили приближенные методы решения задачи о назначении персонала, а следовательно, и задачи транспортировки. С другими способами решения рассмотренных задач читатель может ознакомиться по работам фон Неймана [78] и Эгервари [42].

В. Задача заключения контрактов\*). Всякий раз, когда правительственной организации требуется получить товары из частных источников, производители этих товаров должны участвовать в составлении контрактов. Отдельные предприниматели предлагают свои условия, в которых указывают:

- 1) цену единицы товара или товаров;
- 2) максимальное и минимальное количество каждого товара, которое может быть поставлено по указанной цене;
- 3) любые другие условия, которые желает выдвинуть предприниматель.

Предложенные условия отражают желание производителя получить прибыль, учет им других предложений, а также его собственные специфические ограничения и оговорки. Правительственная организация должна заключать контракты таким образом, чтобы общий расход правительства в долларах был минимален.

При оценке предложений должны также учитываться транспортные и другие издержки, связанные с реализацией каждого предложения. После заключения контракта правительственная организация должна быть готова доказать, что общие затраты правительства были наименьшими из возможных. Для оптимального распределения контрактов необходимо использовать методы линейного программирования.

Рассмотрим сначала простую задачу о заключении контрактов. Имеется  $m$  отдельных поставщиков, готовых принять участие в укомплектовании  $n$  продовольственных складов.

$i$ -й поставщик может поставить не более, чем  $a_i$  единиц продукта,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j$ -му складу требуется  $b_j$  единиц указанного продукта,  $j=1, 2, \dots, n$ . Приобретение и доставка единицы продукта от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му складу

---

\*) Более подробно с этим вопросом можно ознакомиться по работе Стэнли, Хонига и Гейнена [91].

стоит  $c_{ij}$  долларов. Если через  $x_{ij}$  обозначить количество единиц продукта, приобретаемых у  $i$ -го поставщика для доставки к  $j$ -му складу, то задача состоит в отыскании такой совокупности неотрицательных  $x_{ij}$ , что

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и при этом функция

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

должна достигать своего минимального значения. Очевидно, что сформулированная задача идентична транспортной проблеме. Отметим, что  $\sum_i a_i \neq \sum_j b_j$ . В общем случае можно ожидать, что предложение превышает спрос, т. е.  $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$ .

Если ввести в рассмотрение фиктивный  $(n+1)$ -й склад с потребностью

$$\sum_i a_i - \sum_j b_j = b_{n+1}$$

единиц при условии равенства нулю всех цен  $c_{i,n+1}$  для всех  $i$ , то тогда простая задача о заключении контрактов превращается в обычную транспортную задачу. Сформулированная задача о заключении контрактов считается простой потому, что в ней не учитываются многие условия, которые могут быть выдвинуты поставщиками. Например, один поставщик имеет возможность поставить  $a_1$  единиц товара, но готов согласиться на поставку любого количества единиц, меньшего  $a_1$ . Второй поставщик предлагает  $a_2$  единиц, но не согласен на поставку меньшего, чем  $a_2$ , числа единиц. Третий поставщик предлагает  $a_3$  единиц, но не может согласиться на поставку меньшего, чем  $a'_3$ , числа единиц, где  $a'_3 < a_3$ . Четвертый поставщик готов

заключить контракт на поставку в целом  $a_4$  единиц, но предлагаемая им цена зависит от объема поставки.

Эти и другие подобные условия можно учесть, используя различные вычислительные способы, близкие к методам решения транспортной задачи. Некоторые из этих схем рассмотрены Стэнли, Хонигом и Гейненом [91]. Типичная задача о заключении контрактов и ее решение рассматривались Директоратом управления исследованиями [36].

### У п р а ж н е н и я

1. Получить для транспортной задачи упражнения 1 гл. 1 исходный план по правилам «северо-западного угла», минимума по столбцу и минимального элемента матрицы.

2. Используя план, полученный по правилу «северо-западного угла» в качестве исходного, определить оптимальный план задачи упражнения 1 гл. 1. Является ли полученное решение задачи единственным?

3. Выписать задачу, двойственную к транспортной задаче упражнения 2, и показать, что  $u_i$  и  $v_j$ , связанные с любым оптимальным планом, составляют решение двойственной задачи.

4. Решить следующую задачу, заимствованную из работы Джо-зефа [63]. Рассмотрим четыре оперативные базы  $B_i$  и три цели  $T_j$ . В силу различия в типах самолетов, расстояниях до целей и высоте полета вес бомб, доставляемых одним самолетом с любой базы к любой цели, определяется следующей таблицей:

		Цель			
		1	2	3	
Оперативная база	1	8	6	5	= $(c_{ij})$ ,
	2	6	6	6	
	3	10	8	4	
	4	8	6	4	

где  $c_{ij}$  — общий вес бомб, доставляемых одним самолетом с  $i$ -й базы к  $j$ -й цели. Дневная интенсивность каждой базы составляет 150 самолето-вылетов в день. На каждую цель необходимо организовать 200 самолето-вылетов в день. Определить план вылетов с каждой базы к каждой цели, дающий максимальный общий вес бомб, доставляемых ко всем трем целям. Найти все решения задачи.

5. Показать, что оптимальная система  $x_{ij}$  любой транспортной задачи, заключающейся в отыскании минимума функции

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

равна оптимальной системе  $x_{ij}$  для транспортной задачи, в которой постоянная  $k$  либо прибавляется, либо вычитается из всех элементов  $c_{ij}$ , расположенных или в одной и той же строке, или в одном и том же столбце матрицы стоимостей перевозок первой задачи.

---

## Г Л А В А 11

### ОБЩИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В первой части этой главы рассматриваются примеры некоторых наиболее важных (и классических) применений методов линейного программирования. При описании эти приложения группируются в три основные категории: задачи планирования производства и хранения, межотраслевые задачи и задачи о диете \*). В каждом параграфе этой главы будет даваться вначале словесная постановка задачи, а затем ее формулировка как проблемы линейного программирования. Для некоторых задач будут приведены решения числовых примеров. Мы не ставим перед собой цели описать полный комплекс применений линейного программирования. Тем не менее рассматриваемые далее практические задачи дадут читателю некоторое представление об этих применениях. При подборе излагаемых ниже задач мы руководствовались желанием продемонстрировать основные способы построения моделей линейного программирования. Хочется надеяться, что этот материал поможет читателю при постановке и исследовании новых практических задач.

Для демонстрации широкой применимости модели линейного программирования в последний параграф этой главы включены словесные описания ряда приложений. Этот обзор предназначен для информации работников, связанных с промышленностью, управлением и исследованием операций, а также с другими областями, к которым можно успешно приложить методы линейного программирования.

---

\*) Последние две категории часто объединяются в группу задач, связанных с отысканием оптимальной комбинации ресурсов, необходимых для производства заданных продуктов. Задачи типа транспортной проблемы были рассмотрены в гл. 10.

Следует отметить, что не существует единого метода, позволяющего оценить, насколько точно математическая модель практической задачи соответствует ее условиям. Построение моделей линейного программирования для новых сложных задач является длительным процессом. Прежде всего необходимо наметить переменные задачи и определить соотношения между ними, результирующие ограничения и соответствующую линейную форму. После этого построенная модель исследуется методами линейного программирования, и ее решение сравнивается с ожидаемыми результатами. С помощью этого сравнения выясняется, какие новые переменные следует ввести в модель, какие — исключить из нее, как изменить ограничения задачи и ее линейную форму. Затем исследуется вновь построенная модель и т. д. до тех пор, пока исследователь не удовлетворится степенью приближения полученной модели к реальной ситуации или убедится в том, что рассматриваемая проблема не укладывается в рамки линейного программирования. Если в процессе постановки задачи выясняется, что некоторые из соотношений нелинейны, можно воспользоваться одним из трех способов:

- 1) аппроксимировать сомнительное выражение подходящими линейными функциями;
- 2) попытаться переформулировать задачу;
- 3) воспользоваться для решения задачи другими методами.

При использовании первых двух способов исследователь должен избегать существенных изменений задачи, так как это может повести к отклонению математической модели от реальных условий. В третьем случае можно попытаться использовать некоторые из способов нелинейного программирования. Поскольку обсуждение нелинейного программирования выходит за рамки этой книги, мы не будем обсуждать методы, которые можно применить к специальным нелинейным задачам \*).

Для упрощения формулирования приведенных задач их описание (кроме проблемы диеты) будет дано достаточно подробно. В этих случаях рассмотрение будет начинаться с полной и обоснованной постановки соответствующей практической задачи.

---

\*) См. работы Беллмана [6] и Куна и Таккера [69].



## § 1. Задачи планирования производства и хранения \*)

Рассмотрим положение производителя сезонного продукта, который должен распланировать помесечно выпуск этого продукта на следующий год. График предполагаемого спроса на этот год изображен на рис. 19. Предприниматель обязан ежемесячно удовлетворять потребности, определяемые этим графиком. Он может обеспечить месячный спрос, либо производя полностью требуемое количество в течение того же

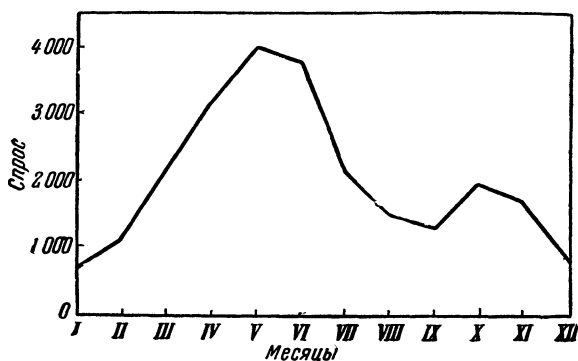


Рис. 19.

месяца, либо производя часть этого количества и покрывая разницу за счет перепроизводства в предыдущих месяцах.

Вообще говоря, любая такая задача имеет много различных планов, удовлетворяющих всем требованиям. Например, предприниматель может производить каждый месяц в точности то число единиц продукта, которое требуется по графику предполагаемого спроса. Однако, поскольку график колеблющегося выпуска связан с чрезмерными затратами в течение периодов повышенного спроса и затратами из-за простоев обслуживающего персонала и оборудования в течение месяцев с пониженным спросом, этот график не является удовлетворительным. С другой стороны, предприниматель, столкнувшись с колебаниями спроса, может произвести из-

---

\*) Весьма много экономических приложений линейного программирования содержится в книгах [4p], [2p]. (Прим. ред.)

лишек продукта в период пониженного спроса с тем, чтобы сохранить его и использовать в период повышенного спроса. Процесс производства тогда может быть сделан совершенно стабильным. Однако вследствие повышения затрат, связанных с хранением излишков на складах, такое решение может оказаться неприемлемым, если оно ведет к сравнительно большим месячным излишкам. Задачи такого рода иллюстрируют трудности, возникающие при наличии противоречивых факторов. Здесь необходимо определить график выпуска продукции, при котором минимизируется сумма затрат, возникающих из-за колебаний производства и хранения. В таких задачах удовлетворительное планирование означает определение и принятие промежуточного плана, заключенного между двумя крайними планами, один из которых минимизирует излишки, а другой — колебания производства. Оптимальный график производства будет зависеть, таким образом, от соотношения убытков, связанных с противоречивыми причинами.

Разработаем теперь математическую модель этой задачи планирования производства. В начале первого месяца предприниматель имеет на складе определенное количество, скажем  $s_0$ , продукта, оставшегося от предшествующего производства. Если (в будущем) предполагается производить продукт нового типа, то считаем  $s_0 = 0$ . Пусть

$x_t$  — число единиц продукта, произведенного в течение  $t$ -го месяца, т. е. выпуск продукции;

$r_t$  — необходимое в  $t$ -м месяце количество единиц продукта, т. е. потребность;

$s_t$  — число не использованных после  $t$ -го месяца единиц продукта, т. е. запас.

По самому существу задачи имеем  $x_t \geq 0$ ,  $r_t \geq 0$ ,  $s_t \geq 0$  для всех значений  $t$ . Для первого месяца производство  $x_1$  и предшествующий запас продукта  $s_0$  должны быть таковы, чтобы сумма их была более или равна потребности  $r_1$ . Отсюда следует соотношение

$$x_1 + s_0 \geq r_1. \quad (1.1)$$

Если (1.1) удовлетворяется как равенство, то запас после первого месяца должен быть равен нулю. Если имеет место неравенство, то  $s_1 > 0$ . В обоих случаях имеем

$$x_1 + s_0 - r_1 = s_1,$$

или

$$x_1 + s_0 - s_1 = r_1.$$

Для второго месяца производство  $x_2$  и предшествующий запас  $s_1$  в сумме должны быть более или равны потребностям второго месяца  $r_2$ . Имеем тогда

$$x_2 + s_1 \geq r_2,$$

или

$$x_2 + s_1 - s_2 = r_2.$$

Вообще, производство  $x_t$ , запас  $s_t$  и потребность  $r_t$  связаны соотношением

$$x_t + s_{t-1} - s_t = r_t. \quad (1.2)$$

Предприниматель стремится свести к минимуму колебания графика выпуска и достичь гладкости процесса производства. Разность между любыми двумя последовательными месячными выпусками продукции, скажем  $x_t - x_{t-1}$ , будет представлять соответствующее расширение или свертывание производства. Так как любое число может быть представлено в виде разности двух неотрицательных чисел, полагаем

$$x_t - x_{t-1} = y_t - z_t, \quad (1.3)$$

где  $y_t \geq 0$  представляет расширение производства и  $z_t \geq 0$  — его свертывание. Сопоставляя (1.2) и (1.3), получаем основные уравнения этой модели:

$$\left. \begin{aligned} x_t + s_{t-1} - s_t &= r_t, \\ x_t - x_{t-1} - y_t + z_t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

здесь  $x_t \geq 0$ ,  $s_t \geq 0$ ,  $y_t \geq 0$ ,  $z_t \geq 0$  и  $t = 1, 2, \dots, n$ . Если в конце года желательно свести к нулю окончательный излишек продукта, полагаем  $s_n = 0$ . В зависимости от условий модели  $x_0 \geq 0$  и  $s_0 \geq 0$ .

Предприниматель, разумеется, заинтересован в получении максимума прибыли. Очевидно, его доход будет зависеть от колебаний графика выпуска продукции и связанных с этим излишков произведенного продукта. Из опыта прошлых лет предпринимателю известно, какова стоимость расширения производства на одну единицу между  $(t-1)$ -м и  $t$ -м месяцами, а также стоимость хранения одной единицы в течение

одного месяца. Пусть этими стоимостями будут соответственно  $a$  долларов и  $b$  долларов, причем  $a > 0$  и  $b > 0$ . Предпринимателю тогда желательно минимизировать

$$b \sum_{t=1}^n s_t + a \sum_{t=1}^n y_t.$$

Если положить  $\frac{a}{b} = \lambda$ , где  $\lambda$  измеряет отношение стоимости единичного увеличения выпуска к стоимости хранения единицы продукта в течение одного месяца, то тогда требуется минимизировать

$$\sum_{t=1}^n s_t + \lambda \sum_{t=1}^n y_t. \quad (1.5)$$

Если значение  $\lambda$  известно, его можно подставить в (1.5) и решить соответствующую задачу линейного программирования симплексным методом. Отметим, что оптимальный план не может иметь для одного и того же месяца  $t$  одновременно и  $y_t > 0$ , и  $z_t > 0$ . Решением задачи является либо единственный оптимальный график выпуска продукции (в случае однозначности решения), либо, в случае неоднозначности решения, система таких графиков, связанных с одним и тем же значением линейной формы. Во многих случаях величина  $\lambda$  не определена, либо предприниматель желает изучить различные графики производства, отвечающие различным значениям  $\lambda$ . В этих случаях, используя видоизменение симплексного метода, оптимальные графики можно построить для всего требуемого диапазона изменений  $\lambda$  \*).

Если  $a$  весьма мало, то соответствующим оптимальным планом будет график, связанный с наибольшими колебаниями производства и наименьшими запасами. Если  $b$  весьма мало, то соответствующим решением будет график, приводящий к наибольшим запасам и наименьшим колебаниям производства. В первом случае задача связана с минимизацией только запасов, тогда как во втором случае требуется минимизировать лишь неравномерность производства.

---

\*) См. изложение параметрических методов в гл. 8.

Приведенные соображения иллюстрируются следующим примером из работы [36].

Ежемесячная потребность в выпускниках школ авиационных механиков (для 12-месячного периода) изображена на

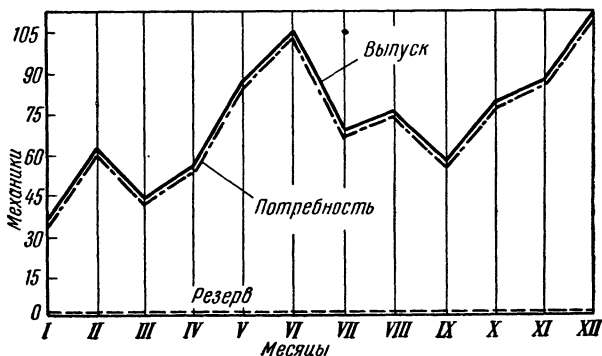


Рис. 20.

рис. 20. Общий выпуск механиков за 12-месячный период должен быть равен общей потребности, т. е. к концу программы выпуска не должно быть ни излишка в числе подготовленных механиков, ни недостатка в нем.

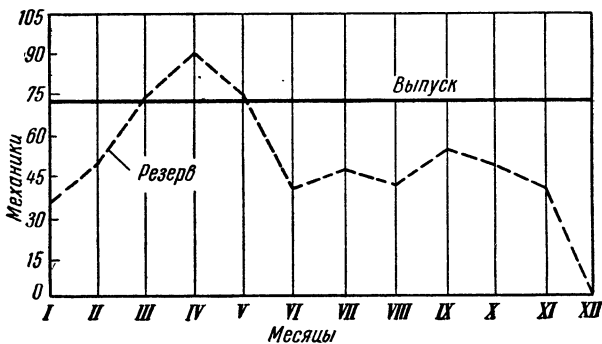


Рис. 21.

Возможные планы выпуска механиков для этой задачи заключены между двумя графиками, по одному из которых каждый выпускник назначается на службу в день окончания

школы (минимальный излишек, рис. 20), а по другому создается определенный резерв выпускников (минимум колебаний выпуска, рис. 21). В первом случае, когда каждый месяц выпускается столько механиков, сколько необходимо, не требуется создания резерва, но создаются наиболее тяжелые условия в работе школы. Второй график исключает колебания в выпуске оканчивающих школу, но приводит к убыткам, связанным с наличием резерва. Промежуточное решение (рис. 22) предполагает более гибкую учебную программу, но в то же время обеспечивает более приемлемые размеры резерва.

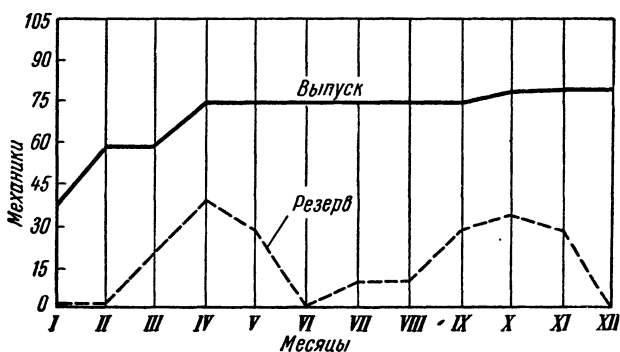


Рис. 22.

Отметим, что уже для 12 периодов времени, т. е. для  $n = 12$ , модель линейного программирования включает 24 уравнения с 48 неизвестными. Задачи такого размера трудно решить при помощи ручных вычислений. Прежде чем приступать к вычислениям (в том числе и на электронных вычислительных машинах), желательно по возможности уменьшить размер задачи. В некоторых случаях в результате тщательного исследования задачи можно обнаружить, что часть ее уравнений и переменных может быть исключена. К числу таких задач принадлежит рассмотренная выше задача планирования производства.

Из уравнения (1.2) имеем

$$x_t = r_t + s_t - s_{t-1},$$

$$x_{t-1} = r_{t-1} + s_{t-1} - s_{t-2}.$$

Подставив эти выражения для  $x_t$  и  $x_{t-1}$  в (1.3), исключаем все  $x_t$  из первоначальной модели и получаем следующую систему уравнений:

$$y_t - z_t + 2s_{t-1} - s_t - s_{t-2} = r_t - r_{t-1}, \quad (1.6)$$

где

$$t = 1, 2, \dots, n$$

и

$$s_{-1} = r_0 = 0.$$

Модель линейного программирования для задачи планирования производства и хранения теперь представлена уравнениями (1.6) и линейной формой (1.5). Мы исключили одно уравнение для каждого периода времени и 12 переменных  $x_t$ . После решения укороченной задачи можно легко вернуться к исходным уравнениям и получить требуемый график производства, содержащий переменные  $x_t$ . Однако, поскольку укороченная система уравнений не ограничена условием  $x_t \geq 0$ , мы не имеем уверенности, что неотрицательные значения  $y_t$ ,  $z_t$  и  $s_t$ , связанные с оптимальным планом укороченной задачи, будут приводить к неотрицательным значениям  $x_t$ . Прежде чем решиться на любое такое исключение, необходимо проверить его корректность. Для этого допустим сначала, что оптимальный план укороченной модели задан. Необходимо показать, что оптимальные значения  $y_t$ ,  $z_t$  и  $s_t$  не могут приводить к отрицательным значениям  $x_t$ . Доказательство предоставляется читателю.

В силу сравнительной простоты условий задачи планирования производства и хранения для ее решения можно применить более простые способы по сравнению с обычным симплексным методом. Боумэн [7] рассмотрел видоизменение задачи, которая может быть представлена в форме транспортной задачи и решена при помощи соответствующего алгоритма. Данциг и Джонсон [28a] предложили графический метод определения оптимальных планов подобных задач.

Для дополнительного чтения по вопросам, касающимся задач планирования, отсылаем читателя к работам Гоффмана и Джекобса [60], Антосевича и Гоффмана [3], Джекобса [62], Мэги [73], Директората управления исследованиями [36], Чарнеса, Купера и Фарра [11], Чарнеса, Купера и Меллона [13].

## § 2. Межотраслевые задачи

Первым применением методов линейного программирования в области экономики была совокупность межотраслевых исследований *input-output* (затраты-выпуск; Купманс [65], Леонтьев [71] и Моргенштерн [75]). Приступая к формулировке моделей *input-output*, рассмотрим экономику, охватывающую только три основные отрасли: транспортное машиностроение, сталелитейную промышленность и угольную промышленность; к четвертой категории отнесены все другие отрасли промышленности (Глезер [50]). Мы собираемся проанализировать взаимоотношения между этими отраслями промышленности в терминах продажи друг другу соответствующей продукции в течение основного периода времени, например одного года. Этот анализ можно без труда провести, отправляясь от таблицы затрат и выпуска (см. табл. 13).

В каждой строке этой таблицы записана стоимость товаров (в долларах), продаваемых отраслью, соответствующей рассматриваемой строке, другим отраслям. Например, в первой строке таблицы отображен сбыт (в долларах) транспортного машиностроения другим отраслям промышленности. Первый элемент первой строки совпадает с продажей транспортным машиностроением продукции транспортному же машиностроению (внутриотраслевая продажа); второй элемент описывает общую продажу продукции транспортного машиностроения сталелитейной промышленности; третьим элементом является продажа угольной промышленности; четвертый элемент представляет общую продажу всем другим отраслям промышленности; наконец, пятым элементом является продажа транспортным машиностроением продукции для удовлетворения так называемого конечного спроса. Вообще, конечный спрос определяется спросом тех потребителей, которые не производят товаров, необходимых для рассматриваемой системы отраслей. В категорию конечного спроса обычно включают внешнюю торговлю, правительственные заказы и т. д. Совокупность товаров, необходимых для удовлетворения конечного спроса, называется обычно его ассортиментом. Суммарная продажа, включающая все пять рассмотренных элементов, представляет общий сбыт транспортного машиностроения в течение основного периода. В каждом столбце таблицы записаны стоимости



Таблица 13. Затраты и выпуск

	Транспортное машиностроение	Сталелитейная промышленность	Угольная промышленность
Транспортное машино- строение	Тр. м. $\rightarrow$ тр. м. $+$ $x_{11}$	Тр. м. $\rightarrow$ ст. пр. $+$ $x_{12}$	Тр. м. $\rightarrow$ уг. пр. $+$ $x_{13}$
Сталелитейная промы- шленность	Ст. пр. $\rightarrow$ тр. м. $+$ $x_{21}$	Ст. пр. $\rightarrow$ ст. пр. $+$ $x_{22}$	Ст. пр. $\rightarrow$ уг. пр. $+$ $x_{23}$
Угольная промышленность	Уг. пр. $\rightarrow$ тр. м. $+$ $x_{31}$	Уг. пр. $\rightarrow$ ст. пр. $+$ $x_{32}$	Уг. пр. $\rightarrow$ уг. пр. $+$ $x_{33}$
Другие отрасли	Др. отр. $\rightarrow$ тр. м. $+$ $x_{41}$	Др. отр. $\rightarrow$ ст. пр. $+$ $x_{42}$	Др. отр. $\rightarrow$ уг. пр. $+$ $x_{43}$

закупок, осуществляемых отраслью, соответствующей этому столбцу, у других отраслей за основной период времени.

Введем следующие обозначения:

$x_i$  — общая валовая продукция  $i$ -й отрасли (в долларах) в течение основного периода,  $x_i \geq 0$ ;

$x_{ij}$  — общая продажа  $i$ -й отрасли продукции  $j$ -й отрасли за основной период времени ( $x_{ij} \geq 0$ );

$y_i$  — объем конечного спроса (в долларах), приходящийся на  $i$ -ю отрасль промышленности ( $y_i \geq 0$ ).

Здесь  $i, j = 1, 2, \dots, m$ .

В этих обозначениях можно составить систему линейных уравнений, описывающую межотраслевые взаимоотношения в рассматриваемой системе отраслей экономики:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} &= y_1, \\ x_2 - x_{21} - x_{22} - x_{23} - x_{24} &= y_2, \\ x_3 - x_{31} - x_{32} - x_{33} - x_{34} &= y_3, \\ x_4 - x_{41} - x_{42} - x_{43} - x_{44} &= y_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В 1930 г. Леонтьев собрал необходимые данные и выпи-сал системы уравнений, подобные (2.1), для классификации 45 отраслей промышленности США на 1919 и 1929 гг. Он предположил, что эту линейную модель экономики для основ-

Другие отрасли	Продукция конечного спроса	Общая продажа
$+ \text{Тр. м.} \rightarrow \text{др. отр.}$ $x_{14}$	$+ \text{Тр. м.} \rightarrow \text{п. к. спр.}$ $y_1$	$= \text{общ. прод. тр. маш.}$ $x_1$
$+ \text{Ст. пр.} \rightarrow \text{др. отр.}$ $x_{24}$	$+ \text{Ст. пр.} \rightarrow \text{п. к. спр.}$ $y_2$	$= \text{общ. прод. ст. пром.}$ $x_2$
$+ \text{Уг. пр.} \rightarrow \text{др. отр.}$ $x_{34}$	$+ \text{Уг. пр.} \rightarrow \text{п. к. спр.}$ $y_3$	$= \text{общ. прод. уг. пром.}$ $x_3$
$+ \text{Др. отр.} \rightarrow \text{Др. отр.}$ $x_{44}$	$+ \text{Др. отр.} \rightarrow \text{п. к. спр.}$ $y_4$	$= \text{общ. прод. др. отр.}$ $x_4$

ного периода времени можно использовать для анализа структуры экономики в будущих периодах. Обозначим через  $\bar{x}_i$  и  $\bar{x}_{ij}$  величины будущего периода, соответствующие величинам  $x_i$  и  $x_{ij}$  рассматриваемого периода. Очевидно, что для транспортного машиностроения отношения  $\frac{\bar{x}_{11}}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_{31}}{\bar{x}_1}, \frac{\bar{x}_{41}}{\bar{x}_1}$  представляют удельные веса товаров, выпускаемых каждой из отраслей и используемых транспортным машиностроением для выпуска единицы своей продукции. Например, второе отношение совпадает с количеством продукции сталелитейной промышленности, необходимым для производства единицы продукции транспортного машиностроения.

Пусть  $a_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij}}{\bar{x}_i}$  — количество продукции  $i$ -й отрасли, необходимое для производства одной единицы продукции  $j$ -й отрасли,  $a_{ij} \geq 0$ . Величины  $a_{ij}$  называются *input-output*-коэффициентами. Для основного периода времени имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 - a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_4 &= \bar{y}_1, \\ \bar{x}_2 - a_{21}\bar{x}_1 - a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_4 &= \bar{y}_2, \\ \bar{x}_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - a_{33}\bar{x}_3 - a_{34}\bar{x}_4 &= \bar{y}_3, \\ \bar{x}_4 - a_{41}\bar{x}_1 - a_{42}\bar{x}_2 - a_{43}\bar{x}_3 - a_{44}\bar{x}_4 &= \bar{y}_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Систему уравнений (2.2) можно записать в форме

$$(I - A)\bar{X} = \bar{Y},$$

где

$$A = (a_{ij}), \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $I - A$  называется *матрицей Леонтьева*. Предполагая, что эта линейная структура экономики (т. е. совокупность *input-output*-коэффициентов) описывает экономические процессы не только в рассматриваемом, но также и в будущем периоде времени, можно определить вектор производства  $X$ , отвечающий заданному вектору конечного спроса  $Y$ . Отсюда следует, что общая задача *input-output*-экономики заключается в отыскании вектора  $X$ , удовлетворяющего ограничениям

$$\left. \begin{aligned} X &\geq 0, \\ (I - A)X &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где  $Y$  — данный неотрицательный и ненулевой вектор конечного спроса, а  $A$  — данная матрица *input-output*-коэффициентов. Для рассматриваемой задачи, где объем конечного спроса для каждой отрасли предполагается положительным,

можно показать, что не только  $a_{ij} \geq 0$ , но также и  $\sum_{i=1}^m a_{ij} < 1$  для  $j = 1, 2, \dots, m$  (Моргенштерн [75]). Такая структура называется *открытой моделью*. Моргенштерн также показал [75], что если матрица  $A$  удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}| < 1$$

для  $j = 1, 2, \dots, m$ , то  $I - A$  — неособенная матрица\*). Отсюда следует, что решением уравнений (2.3) является:

$$X = (I - A)^{-1} Y.$$

---

\*) См. также (6p), стр. 67. (Прим. ред.)

Для представления межотраслевой модели в виде задачи линейного программирования перейдем, прежде всего, от системы уравнений (2.3) к системе неравенств

$$(I - A)X \leq Y. \quad (2.4)$$

Нас интересуют решения системы (2.4), которые не обязаны удовлетворять потребностям конечного спроса. Очевидным, но непригодным практически решением является  $X = O$ . Отсюда можно заключить, что система (2.4) совместна. При другой формулировке рассматриваемой проблемы может оказаться, что система (2.4) представляет совокупность равенств и неравенств. Систему неравенств (2.4) можно переписать в эквивалентной форме:

$$(I - A)X + W = Y, \quad (2.5)$$

где  $W$  —  $m$ -мерный вектор-столбец, компонентами  $w_i$  которого являются неотрицательные дополнительные переменные. Система (2.5) состоит из  $m$  уравнений с  $2m$  переменными.

Функция цели межотраслевой задачи (линейная форма) может иметь различные интерпретации. Например, если  $c_j$  представляет доход от производства единицы  $j$ -го товара, то линейная форма задачи  $cX$  совпадает с общим доходом. Здесь  $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ . Коэффициенты линейной формы, соответствующие дополнительным переменным, предполагаются здесь равными нулю. Если желательно выпустить как можно больше продукции некоторой отрасли или нескольких отраслей, то линейная форма совпадает с суммой соответствующих этим отраслям переменных  $x_i$ . Например, для первой, третьей и седьмой отраслей, линейная форма имеет вид  $x_1 + x_3 + x_7$ .

В дополнение к ограничениям (2.3) или (2.4) межотраслевая задача может обуславливать, что уровень производства  $x_i$  (активность)  $i$ -й отрасли промышленности не должен превышать некоторого предела (предельного уровня). Обозначим этот предельный уровень через  $l_i$ , и пусть вектор предельных уровней  $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)$  — неотрицательный вектор-столбец. Тогда  $X \leq L$ . В рассматриваемой экономической модели, связанной с конкретным периодом времени, например месяцем, можно допустить, что для некоторых отраслей промышленности часть продукции предшествующего периода можно использовать в качестве резерва для восполнения будущих потребностей. Эти остатки можно употребить для

удовлетворения конечного спроса в следующий период. Пусть в нашей модели  $s_{0i}$  представляет количество  $i$ -го продукта, оставшееся в результате производства предшествующего периода, и пусть вектор остатков  $S_0 = (s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0m})$  — неотрицательный вектор-столбец. В этом случае приходим к задаче линейного программирования, заключающейся в максимизации линейной формы  $cX$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} (I - A)X + W &= Y - S_0, \\ X + U &= L, \\ X &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  — неотрицательный вектор-столбец, компонента  $u_i$  которого представляет отклонение уровня производства  $i$ -й отрасли от его предела. Если для некоторого  $i$  разность  $y_i - s_{0i} < 0$ , то потребности конечного спроса для  $i$ -й отрасли будут удовлетворяться остатком и реальный конечный спрос для этой отрасли в данный период времени становится равным нулю\*). Будем, однако, предполагать, что по крайней мере одна из разностей  $y_i - s_{0i} > 0$ .

Система (2.6) называется *статической моделью Леонтьева*, так как она связана с фиксированным периодом времени. Более реальной, хотя и более сложной является модель производства, связанная с несколькими периодами времени. Рассмотрим частную формулировку динамической модели производства, приводящую к задаче линейного программирования (Вагнер [98]). Введем следующие изменения в наши обозначения. Пусть  $n$  равно общему числу рассматриваемых периодов времени, а  $t = 1, 2, \dots, n$  — любой такой частный период. Тогда для всякого  $t$  мы имеем следующие неотрицательные векторы-столбцы:

$X_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm})$  — вектор производства,

$Y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm})$  — вектор конечного спроса,

$S_t = (s_{t1}, s_{t2}, \dots, s_{tm})$  — вектор остатков после  $t$  периодов.

Остатки могут быть использованы в  $(t+1)$ -м периоде,

$U_t = (u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tm})$  — вектор отклонений от предельных уровней производства в  $t$ -й период времени.

---

\*) Точнее первое уравнение из (2.6) можно записать в виде  $(I - A)X + W = Y_0$ , где  $Y_0 = (y_{10}, \dots, y_{m0})$ ,  $y_{i0} = \max \{0, y_i - s_{0i}\}$ . (Прим. ред.)

Предположим, что известен первоначальный вектор остатков  $S_0$  и вектор предельных уровней  $L$  остается неизменным для всех периодов времени.

Главное различие между статической и динамической моделями заключается в том, что в последнем случае планирование уровней производства различных отраслей промышленности определяется не только данным периодом времени, но и будущими периодами. По мере перехода от периода к периоду к вектору  $L$  будет прибавляться неотрицательный вектор-столбец  $V_t$ , компоненты которого характеризуют увеличения соответствующих предельных уровней. Для этого необходимо, кроме матрицы Леонтьева  $(I - A)$ , знать  $m$ -мерную матрицу  $B$  капитальных вложений. Элементами матрицы  $B$  служат неотрицательные числа; элемент, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен стоимости товаров  $i$ -й отрасли, необходимых для увеличения предельного уровня производства  $j$ -й отрасли на единицу.

Пусть  $V_t = (v_{t1}, v_{t2}, \dots, v_{tm})$  — неотрицательный вектор увеличения предельных уровней производства. Здесь  $v_{ti}$  — приращение предельного уровня производства  $i$ -й отрасли за  $t$ -й период времени. Тогда  $i$ -я строка произведения  $BV_t$ , т. е.

$$b_{i1}v_{t1} + b_{i2}v_{t2} + \dots + b_{im}v_{tm}$$

представляет стоимость товаров  $i$ -й отрасли, используемых для повышения за период времени  $t$  предельных уровней производства для всех отраслей рассматриваемой экономики. Эти товары не могут быть использованы для удовлетворения потребностей конечного спроса. Предположим, что повышение предельного уровня за счет производства в период  $t$  осуществляется в следующий  $(t + 1)$ -й период времени. Допустим также, что матрицы  $I - A$  и  $B$  неизменны для всех периодов времени и потребности конечного спроса полностью удовлетворяются. Для каждого периода времени совокупность отмеченных условий может быть записана в виде

$$(I - A)X_t + S_{t-1} = Y_t + BV_t + S_t \quad (2.7)$$

$$X_t + U_t = L + \sum_{q=1}^{t-1} V_q, \quad (2.8)$$

$$t = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнение (2.7) устанавливает, что для любого  $t$  сумма общего выпуска продукции и предшествующего остатка равна сумме потребностей конечного спроса, затрат на увеличение предельного уровня производства на последующий период и остатка текущего периода времени. В уравнениях (2.8) уровень производства (использованный и неиспользованный) приравнивается сумме исходного предельного уровня и последующих его увеличений в течение периодов, предшествующих данному. Полученные уравнения могут быть записаны в виде

$$(I - A)X_t - BV_t - S_t + S_{t-1} = Y_t, \quad (2.9)$$

$$X_t - \sum_{q=1}^{t-1} V_q + U_t = L.$$

Для любой данной системы  $Y_t$ ,  $L$  и  $S_0$  можно составить таблицу коэффициентов, как показано в таблице 14. Системы

Т а б л и ц а 14

	$X_1$	$V_1$ $S_1$ $U_1$	$X_2$	$V_2$ $S_2$ $U_2$	...	$X_n$	$V_n$ $S_n$ $U_n$
$Y_1 - S_0$ $L$	$(I - A) - B - I$ $I$	$I$					
$Y_2$ $L$	$-I$	$I$	$(I - A) - B - I$ $I$	$I$			
$\vdots$					$\ddots$		
$Y_n$ $L$	$-I$		$-I$			$(I - A) - B - I$ $I$	$I$

такого рода называются блочно-треугольными. Задаваясь соответствующей линейной формой, которая может определяться стоимостями производства, расширения производства и хранения продукции, задачу можно решить с помощью обычного симплексного метода. Однако даже для небольшого числа периодов времени количество уравнений и переменных становится слишком большим для того, чтобы задача могла быть решена на большинстве электронных вычислительных машин,

не говоря уже о ручных вычислениях. Имеется несколько исследований, дающих возможность уменьшить объем вычислений за счет использования выгод блочно-треугольной формы задачи (с ее высокой плотностью нулевых элементов) или за счет уменьшения числа уравнений с помощью некоторых преобразований системы условий. Первый случай разобран Данцигом [20], второй — Вагнером [98].

### § 3. Задачи диеты

Основная задача диеты была сформулирована в терминах линейного программирования в § 2 гл. 1. Обсудим теперь частную математическую модель задачи диеты и проверим с помощью ее решения, насколько формулировка, приведенная в гл. 1, согласуется с действительностью. Такое исследование типично для задач линейного программирования вообще, и его рекомендуется проводить при попытках описать сложную ситуацию элементарной линейной моделью. Модели для таких ситуаций сначала берутся очень простыми, и исследователь, используя решения соответствующих упрощенных задач, может оказаться в состоянии построить более реалистические модели. Для иллюстрации такого процесса опишем вкратце различные постановки задачи диеты, которые помогут приблизить модель к реальным условиям.

Исторически задача диеты Стиглера [92] явилась первой до некоторой степени сложной задачей линейного программирования, решенной симплексным методом. Задача заключалась в составлении из имевшихся в распоряжении 77 видов пищи такой диеты, которая, обеспечивая, с одной стороны, удовлетворение минимальных потребностей в девяти необходимых для жизнедеятельности веществах, например, витамине А, белках, углеводах и т. п., была бы в то же время связана с минимальной стоимостью. Полученная диета рассчитывалась для питания одного человека в течение одного года. Формулировка этой задачи в терминах линейного программирования включала девять уравнений с 86 переменными, из которых девять были дополнительными. Оптимальный план, полученный симплексным методом, удовлетворял, конечно, всем требованиям задачи. Однако, поскольку симплексный процесс имеет дело только с опорными планами, оптимальная диета состояла лишь из девяти различных видов пищи. Эта диета,



полученная методами линейного программирования, складывалась из различных количеств пшеничной муки, кукурузы, сгущенного молока, растительного масла, сала, говяжьей печени, капусты, картофеля и шпината на общую сумму 39 долларов 67 центов (в ценах 1939 г.). Диета, полученная Стиглером с помощью метода последовательных приближений, состояла лишь из пяти видов пищи: пшеничной муки, сгущенного молока, капусты, шпината и фасоли и стоила 39 долларов 93 цента. Такие диеты хотя и дешевы, но абсолютно безвкусны. На подобной диете мог остановиться разве лишь калькулятор концентрационного лагеря. Стиглер приводит также недорогую для 1939 г. диету, составленную диетврачом и стоившую 115 долларов. Разница в стоимости была вызвана тем, что в последней диете учитывались требования вкуса, разнообразия пищи и большего числа ее видов. Каким образом, отправляясь от основной формулировки, можно приспособить первоначальную модель задачи диеты к этим дополнительным требованиям?

Мы имеем корректное решение задачи в исходной постановке, но это решение отбрасывается как непригодное для использования. Для устранения недостатков полученной диеты необходимо рассмотреть все оптимальные планы задачи и образовать различные их выпуклые комбинации. Это позволит нам выбрать диету, включающую более чем девять видов пищи. Если подобным образом не удастся выбрать приемлемой диеты, то придется изменить имеющуюся модель, включив в нее неучтенные ранее условия. Новая модель должна быть такой, чтобы оптимальный план задачи содержал более чем девять видов пищи и при этом также учитывались вкусовые качества диеты. Выполнение перечисленных требований может быть обеспечено путем введения в модель неравенств, в силу которых некоторые виды пищи должны содержаться в окончательной диете хотя бы в минимальных количествах \*).

---

\*) Следует заметить, что введение таких неравенств не увеличивает размеров модели линейного программирования. Например, если нижними границами являются  $a_j$ , то система неравенств имеет вид  $x_j \geq a_j$ . Вводя неотрицательные дополнительные переменные, получаем  $x_j - y_j = a_j$  или  $x_j = y_j + a_j$ . В первоначальную систему необходимо подставить  $y_j + a_j$  вместо соответствующей переменной  $x_j$  и, следовательно, число ограничений и переменных останется тем же, что и в первоначальной постановке.

можем также определить величины, характеризующие предпочтительность той или иной пищи (коэффициенты предпочтительности), и, сложив их с соответствующими коэффициентами стоимости, получить новую линейную форму задачи. Другой подход к общей задаче диеты, приводящий к более разнообразному питанию, заключается в подразделении ее на меньшие задачи, каждая из которых охватывает отдельный класс видов пищи. В этом случае мы должны выбрать оптимальные диеты из овощей, фруктов и мяса. Решением общей задачи явится тогда составная диета. При этих попытках внести больше реализма в задачу мы сталкиваемся с возрастанием стоимости окончательной диеты. Если задача связана с дальнейшими ограничениями, стоимость оптимальной диеты будет, вообще говоря, возрастать \*).

Имеется, однако, много ситуаций, в которых приложима модель основной задачи диеты. Это касается определения состава животноводческих кормовых смесей наименьшей стоимости или смешения различных ингредиентов, например химических веществ или удобрений, удовлетворяющего требованию минимальности стоимости. В применении к подобным задачам методы линейного программирования оказываются весьма эффективными. Для иллюстрации задачи такого типа приведем пример отыскания рациона минимальной стоимости для крупного рогатого скота, предложенный Вафом [100]. Формулировка и решение этой задачи даны Гольдстейном [51a]. Вычисления приведены в таблице 15. Эта задача заключается в составлении рациона из десяти видов кормов, обеспечивающего усвояемость питательных веществ, протеина, кальция и фосфора. Условия задачи отражены в таблице 15. Модель линейного программирования состояла из четырех уравнений с 14 неизвестными; вычисления начинались с полного искусственного базиса. Одна единица каждого из переменных соответствовала 100 фунтам. Правые части условий (необходимые количества питательных веществ, протеина и т. д.) измерялись в фунтах. Оптимальный план требует приобретения 18,771 фунта кукурузы, 0,06142 фунта связанного

---

\*) Отсылаем читателя к недавней работе Вольфа [102], где решена модифицированная задача диеты Стиглера с квадратичной функцией цели. Такая постановка вносит больше реализма и разнообразия в оптимальную диету.

Т а б л и ц а 15. Решение задачи Вафа

				Кукуруза	Овес	Молотая кукуруза	
I	$i$	Ба- зис	$c$	2,40	2,52	2,18	
			$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
	1	$P_{15}$	$w$	74,2	78,6	70,1	80,1
	2	$P_{16}$	$w$	14,7	6,5	9,4	8,8
	3	$P_{17}$	$w$	0,14	0,02	0,09	0,03
	4	$P_{18}$	$w$	0,55	0,27	0,34	0,30
	5			0	— 2,40	— 2,52	— 2,18
	6			89,59	85,39	79,93	89,23
II		$P_{15}$	$w$	43,09623	<b>64,84663</b>	50,2105	61,4800
		$P_8$	3,70	0,39623	0,17520	0,25337	0,23720
		$P_{17}$	$w$	0,03698	— 0,025552	0,024125	— 0,03167
		$P_{18}$	$w$	0,31623	0,16663	0,19051	0,16005
				1,46603	— 1,75176	— 1,58254	— 1,3024
				43,44943	64,98771	50,4251	61,6084
III		$P_1$	2,40	0,66459	1	0,77430	0,94808
		$P_8$	3,70	0,27979	0	0,11771	0,071090
		$P_{17}$	$w$	0,053964	0	0,043910	— 0,007445
		$P_{18}$	$w$	0,205485	0	0,061490	0,002074
				2,63023	0	— 0,22616	0,35844
				0,25945	0	0,10540	— 0,00537
IV		$P_1$	2,40	0,24520	1	0,64880	0,94385
		$P_8$	3,70	0,09003	0	0,06093	0,069175
		$P_{17}$	$w$	0,057096	0	0,04485	— 0,007413
		$P_8$	2,44	0,60659	0	0,18152	0,006122
				2,40167	0	— 0,29455	0,35613
				0,05710	0	0,04485	— 0,007413

## СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Отруби	Мягие корма	Мука из льняных семян	Мука из семян хлопчатника	Соевая мука
2,14	2,44	3,82	3,55	3,70
$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
67,2 13,7 0,14 1,29	78,9 16,1 0,09 0,71	77,0 30,4 0,41 0,86	70,6 32,8 0,20 1,22	78,5 37,1 0,26 0,59
— 2,14 82,33	— 2,44 95,8	— 3,82 108,67	— 3,55 104,82	— 3,70 116,45
38,2121 0,36927 0,04399 1,07213	44,8340 0,43396 — 0,02283 0,45396	12,6766 0,81941 0,19696 0,37655	1,19838 0,88410 — 0,02986 0,69838	0 1 0 0
— 0,77369 39,3282	— 0,83434 45,2651	— 0,7882 13,2501	— 0,27886 1,86690	0 0
0,58927 0,26603 0,05905 0,97394	0,69138 0,31283 — 0,005162 <b>0,33876</b>	0,19549 0,78516 0,20195 0,34398	0,018480 0,88086 — 0,02939 0,69530	0 1 0 0
0,25856 1,03299	— 0,37680 0,33359	— 0,44575 0,54593	— 0,24647 0,66591	0 0
— 1,39850 — 0,63337 0,07389 2,87505	0 0 0 1	— 0,50655 0,46751 0,20719 1,01541	— 1,4006 0,23877 — 0,01880 2,05252	0 1 0 0
— 0,82475 0,07389	0 0	— 0,82835 0,20719	— 1,01985 — 0,01880	0 0

				Кукуруза	Овес	Молотая кукуруза	
V	<i>i</i>	Ба- зис	<i>c</i>	2,40	2,52	2,18	
				<i>P</i> <sub>0</sub>	<i>P</i> <sub>1</sub>	<i>P</i> <sub>2</sub>	<i>P</i> <sub>3</sub>
	<i>P</i> <sub>1</sub>	2,40	0,30028	1	0,69206	<b>0,93670</b>	
	<i>P</i> <sub>8</sub>	3,70	0,07050	0	0,04559	0,07171	
	<i>P</i> <sub>9</sub>	2,60	0,16353	0	0,12845	—0,02123	
	<i>P</i> <sub>5</sub>	2,44	0,413005	0	0,02946	0,03126	
VI			2,41444	0	—0,28452	0,35447	
			0	0	0	0	
	<i>P</i> <sub>3</sub>	2,18	0,32057	1,06758	0,73883	1	
	<i>P</i> <sub>8</sub>	3,70	0,04751	—0,076556	—0,007395	0	
	<i>P</i> <sub>9</sub>	2,60	0,17034	0,02267	0,14413	0	
	<i>P</i> <sub>5</sub>	2,44	0,40298	—0,03337	0,006371	0	
VII			2,3008	—0,37842	—0,54642	0	
	<i>P</i> <sub>3</sub>	2,18	0,18771				
	<i>P</i> <sub>14</sub>	0	0,06142				
	<i>P</i> <sub>9</sub>	2,60	0,17020				
	<i>P</i> <sub>5</sub>	2,44	0,58528				
			2,2798	—0,3446	—0,5432	0	

Продолжение

Отруби	Мягкие корма	Мука из льняных семян	Мука из семян хлопчатника	Соевая мука
2,14	2,44	3,82	3,55	3,70
$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
—1,32721	0	—0,30666	—1,41873	0
—0,65865	0	0,39664	0,24520	1
0,21163	0	0,59343	—0,05383	0
2,62452	1	0,31291	2,11624	0
—0,80822	0	—0,78200	—1,02406	0
0	0	0	0	0
—1,4169	0	—0,32739	—1,5146	0
—0,55704	0	0,42012	0,35381	1
0,18155	0	0,58648	—0,08599	0
2,66881	1	0,32315	2,16358	0
—0,30598	0	—0,66595	—0,48717	0
—0,05964	0	—0,85174	—0,64364	—0,44224

			Корма, содержащие клейковину	Вареная кукуруза	Излишек питатель- ных веществ
<i>i</i>	Базис	<i>c</i>	2,60	2,54	0
			<i>P</i> <sub>9</sub>	<i>P</i> <sub>10</sub>	<i>P</i> <sub>11</sub>
1	<i>P</i> <sub>15</sub>	<i>w</i>	76,3	84,5	—1
2	<i>P</i> <sub>16</sub>	<i>w</i>	21,3	8,0	0
3	<i>P</i> <sub>17</sub>	<i>w</i>	0,48	0,22	0
4	<i>P</i> <sub>18</sub>	<i>w</i>	0,82	0,71	0
5			—2,60	—2,54	0
6			98,90	93,43	—1
II	<i>P</i> <sub>15</sub>	<i>w</i>	31,2313	67,5728	—1
	<i>P</i> <sub>8</sub>	3,70	0,57412	0,21563	0
	<i>P</i> <sub>17</sub>	<i>w</i>	0,33073	0,16394	0
	<i>P</i> <sub>18</sub>	<i>w</i>	0,48127	0,58278	0
			—0,47575	—1,7422	0
			32,0432	68,3195	—1
III	<i>P</i> <sub>1</sub>	2,40	0,48162	1,04204	—0,015421
	<i>P</i> <sub>8</sub>	3,70	0,48974	0,03307	0,0027018
	<i>P</i> <sub>17</sub>	<i>w</i>	0,34304	0,19056	—0,000394
	<i>P</i> <sub>18</sub>	<i>w</i>	0,40101	0,40914	0,002570
			0,36793	0,08324	—0,027014
			0,74405	0,59970	1,002176
IV	<i>P</i> <sub>1</sub>	2,40	—0,33683	0,20701	—0,02067
	<i>P</i> <sub>8</sub>	3,70	0,11942	—0,34476	0,000329
	<i>P</i> <sub>17</sub>	<i>w</i>	<b>0,34915</b>	0,19680	—0,000355
	<i>P</i> <sub>5</sub>	2,44	1,18378	1,20777	0,007585
			—0,078113	—0,37185	—0,029872
			0,34915	0,19680	—0,000355

Продолжение

Излишек протеина	Излишек кальция	Излишек фосфора	Искусственный базис			
0	0	0	$w$	$w$	$w$	$w$
$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$
0 -1 0 0	0 0 -1 0	0 0 0 -1	1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 -1	0 -1	0 -1	0 0	0 0	0 0	0 0
2,11590 -0,02695 0,007008 0,015903	0 0 -1 0	0 0 0 -1	1 0 0 0		0 0 1 0	0 0 0 1
-0,099730 2,13881	0 -1	0 -1	0 0		0 0	0 0
0,03263 -0,03267 0,007842 0,010466	0 0 -1 0	0 0 0 -1			0 0 1 0	0 0 0 1
-0,042572 0,018302	0 -1	0 -1			0 0	0 0
0,011269 -0,04234 0,00800 0,030895	0 0 -1 0	2,04095 0,92347 -0,01524 -2,95198			0 0 1 0	
-0,05421 0,00800	0 0	1,11230 -0,01524			0 0	



			Корма, содержа- щие клейковину	Вареная кукуруза	Излишек питатель- ных веществ
V	<i>i</i>	Базис	2,60	2,54	0
		<i>c</i>	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
		$P_1$ 2,40	0	0,39686	-0,02101
		$P_8$ 3,70	0	-0,41207	0,000450
		$P_9$ 2,60	1	0,56365	-0,001016
VI		$P_5$ 2,44	0	0,54053	-0,008788
			0	-0,32782	-0,02995
			0	0	0
		$P_3$ 2,18	0	0,42368	-0,02243
		$P_8$ 3,70	0	-0,44246	0,002058
VII		$P_9$ 2,60	1	0,57265	-0,001492
		$P_5$ 2,44	0	0,52729	0,009489
			0	-0,47800	-0,02200
		$P_3$ 2,18			
		$P_{14}$ 0			
		$P_9$ 2,60			
		$P_5$ 2,44			
			0	-0,28233	-0,02241

Продолжение

Излишек протеина	Излишек кальция	Излишек фосфора	Искусственный базис			
0	0	0	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$
$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$
0,018987	—0,96473	2,02625				
—0,04507	0,34203	0,92868				
0,022913	—2,86412	—0,04365				
0,003771	3,39050	—2,90031				
—0,052423	—0,22372	1,10888				
0	0	0				
0,02027	—1,02992	2,16318				
—0,04653	0,41589	<b>0,77356</b>				
0,02334	—2,8860	0,00228				
0,003138	3,4227	—2,96792				
—0,05961	0,14135	0,34210				
—0,03903	—0,04257	0				

фосфора, 17,020 фунта кормов, содержащих клейковину, и 58,528 фунта мучных смесей на общую сумму 2,2798 доллара. В заключительной части таблицы 15 мы представили только разности  $z_j - c_j$  и столбец  $P_0$ ; вычисление всех остальных элементов предоставляется читателю. Очевидно, что в этих элементах не будет нужды до тех пор, пока почему-либо не потребуется определить все оптимальные планы задачи. Данная задача имеет единственный оптимальный план.

В своих вычислениях Гольдстейн продемонстрировал три различных критерия для выбора вектора, подлежащего вводу в базис. Обычный и наиболее легко применимый критерий, заключающийся в выборе максимальной разности  $(z_j - c_j) > 0$ , использован при переходе от первого базиса ко второму, от четвертого — к пятому и от шестого — к седьмому. Критерий, использованный при переходе от второго базиса к третьему, состоял в выборе вектора, более всего уменьшающего значение линейной формы. Для упрощения применения этого правила выбор был ограничен либо  $x_1$ , либо  $x_{10}$ , т. е. двумя переменными с наибольшими значениями разности  $z_j - c_j$ . При переходе от третьего базиса к четвертому выбирался вектор, не только уменьшавший значение линейной формы, но исключавший также один из искусственных векторов. С помощью этого критерия мы быстрее приходим к одному из планов задачи. Наконец, поскольку интерес представляет оптимальный план, не связанный с избытком питательных веществ, вместо  $x_{14}$  при переходе от пятого к шестому плану была выбрана переменная  $x_3$ .

#### § 4. Специальные задачи линейного программирования

Существует ряд специальных задач, иногда не укладывающихся в схему линейного программирования, структура которых дает возможность эффективно решать их с помощью различных модификаций симплексного метода. Математические модели некоторых из этих задач похожи на обычную задачу линейного программирования, тогда как другие задачи включают различные нелинейные ограничения либо в условиях, либо в функции цели. Так как теория нелинейного программирования не столь строга и совершенна, как линейное программирование, один из путей решения нели-

нейных задач состоит в их приближенной линеаризации. Общих рецептов аппроксимации нелинейной задачи линейной моделью не существует. Разработка общих методов линеаризации, столь же эффективных в применении к конкретным задачам, как и найденные до сих пор частные приемы, представляет обширное поле для исследования. Мы остановимся вкратце на нескольких специальных задачах, дадим соответствующие ссылки на литературу и укажем комплекс вопросов, которые ждут еще своего разрешения.

Задача с ограниченными переменными. В этих задачах переменные ограничиваются сверху так, что система ограничений задачи включает совокупность неравенств

$$x_j \leq d_j.$$

Условия такого рода, например ограничения мощности и потребностей производства, действительно встречаются во многих приложениях. Одним из путей решения подобных задач служит замена системы неравенств  $x_j \leq d_j$  эквивалентной системой равенств с неотрицательными переменными. Однако это существенно увеличивает число ограничений задачи. Имеется более эффективный способ (Чарнес и Лемке [14] и Данциг [24]), связанный с небольшим видоизменением симплексного метода и дающий возможность решить задачу, не увеличивая размера исходной модели. Этот способ основывается на том, что матрица, обратная базису расширенной задачи, может быть получена из матрицы, обратной соответствующему базису первоначальной задачи. Отметим, что этот способ был обнаружен в процессе применения общего симплексного метода к расширенным задачам. Этот факт в совокупности с аналогичными исследованиями наводит на мысль, что при рассмотрении новой модели линейного программирования полезно строить числовые примеры и решать их с помощью обычных методов. Исследование вычислительных таблиц способствует выявлению скрытых свойств задачи, что в свою очередь может привести к открытию специальных вычислительных методов.

Целочисленное линейное программирование. Здесь наряду с обычными линейными условиями на переменные задачи накладывается следующее ограничение: все они должны быть целыми числами. Напомним, что в случае транспортной проблемы с целочисленными объемами

запасов и потребностей ее решение автоматически удовлетворяло условию целочисленности. Это свойство вытекало из специального вида матрицы задачи. В настоящее время имеется ряд работ, классифицирующих целочисленные задачи по свойствам матрицы их коэффициентов (Хеллер и Томпкинс [54] и Гоффман и Крускал [61]). Специальный класс проблем был решен в целых числах Гроссом [52]; решение нескольких задач с дискретными переменными описано Данцигом. Решение общей задачи линейного программирования в целых числах является на сегодняшний день открытым вопросом.

Транспортная задача с ограничениями по пропускной способности. Эта задача отличается от обычной транспортной проблемы наличием ограничений вида  $x_{ij} \leq d_{ij}$ . Была найдена эффективная вычислительная схема, в которой используются исходный и двойственный аспекты задачи (Форд и Фулкерсон [44]).

Многоиндексная транспортная задача. Приведенный здесь пример трехиндексной задачи заимствован из работы Шелла [90]. Допустим, что фабрикант мыла имеет  $l$  мыловаренных заводов в разных районах. Каждый из  $l$  заводов может выпускать  $m$  различных сортов мыла. Требуется распределить произведенное заводами мыло между  $n$  различными пунктами спроса. Пусть

$a_{ik}$  — число единиц мыла всех сортов, которое нужно перевезти с  $i$ -го завода к  $k$ -му пункту спроса;

$b_{jk}$  — число единиц мыла  $j$ -го сорта, требующееся на  $k$ -м пункте спроса;

$d_{ij}$  — число единиц мыла  $j$ -го сорта, вывозимого с  $i$ -го завода;

$x_{ijk}$  — число единиц мыла  $j$ -го сорта, произведенного на  $i$ -м заводе и перевозимого к  $k$ -му пункту спроса;

$c_{ijk}$  — стоимость перевозки единицы мыла  $j$ -го сорта с  $i$ -го завода к  $k$ -му пункту спроса.

Задача заключается в нахождении системы  $x_{ijk} \geq 0$  такой, что

$$\sum_j x_{ijk} = a_{ik}, \quad \sum_i x_{ijk} = b_{jk}, \quad \sum_k x_{ijk} = d_{ij}$$

и при этом  $\sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$  достигает минимума.

Для того чтобы задача имела смысл, необходимо соблюдение равенств

$$\sum_k a_{ik} = \sum_j d_{ij}, \quad \sum_i a_{ik} = \sum_j b_{jk}, \quad \sum_i d_{ij} = \sum_k b_{jk}.$$

Общего метода для решения таких задач пока не создано. Мы очень мало знаем о свойствах их планов, за исключением того, что нет гарантии их целочисленности при целочисленных  $a_{ik}$ ,  $b_{jk}$ ,  $d_{ij}$  (Мошкин [76]). Различные формулировки трехиндексной задачи даны в работе Шелла [90], где упоминается также о путях ее дальнейшего обобщения.

Задача с разрывной функцией цели. Это еще одна нерешенная задача программирования, частный случай которой может быть решен методами линейного программирования (Гирш и Данциг [56]). Задача здесь состоит в оптимизации разрывной функции. Каждая переменная задачи связана с обычным коэффициентом стоимости  $c_j$ , а также с таким фиксированным коэффициентом стоимости  $d_j$ , что  $d_j = 0$  при  $x_j = 0$  и  $d_j = d_j$  при  $x_j > 0$ . Принимая

$$d_j(x_j) = 0,$$

если  $x_j = 0$ , и

$$d_j(x_j) = d_j,$$

если  $x_j > 0$ , приходим к задаче, связанной с минимизацией

$$\sum_j [c_j x_j + d_j(x_j)].$$

Задачи динамического и нелинейного программирования. В этих областях имеется значительное число работ. Для динамических (т. е. с меняющимися во времени условиями) задач линейного программирования были высказаны предположения, упрощающие вычислительные схемы применительно к крупномасштабным задачам (Данциг [20]). Описание и способы нелинейного программирования связаны с рассмотрением общей задачи программирования, математическая модель которой содержит либо нелинейные ограничения, либо нелинейную функцию цели, или и то и другое одновременно. Было сформулировано и решено несколько частных и интересных задач такого рода. Интерпретацию некоторых нелинейных задач в терминах множи-

телей Лагранжа читатель может найти в работе Куна и Таккера [69]; динамические и нелинейные задачи программирования рассмотрены Беллманом [6]. Другой класс нелинейных задач с выпуклыми функциями цели и линейными ограничениями сведен Чарнесом и Лемке [15] к обычной задаче линейного программирования, линейная форма которой аппроксимирует выпуклую функцию цели исходной задачи. Дополнительные ссылки по этим вопросам приведены в библиографии. К этой области можно также отнести задачу стохастического линейного программирования, или линейного программирования в условиях неопределенности. Тинтнер [93а] рассмотрел задачу линейного программирования, элементы матрицы коэффициентов для которой являются случайными величинами. Задачи подобного типа рассматривались также Данцигом [25, 26].

## § 5. Обзор областей применения линейного программирования

Первые приложения методов линейного программирования подразделялись на три основные категории: военные приложения, разрабатывавшиеся группой *Project SCOOP* военно-воздушных сил США, межотраслевая экономика, основанная на модели *input-output* Леонтьева, и задачи, касающиеся связи между теорией игр двух лиц с нулевой суммой и линейным программированием. За прошедшие несколько лет эти приложения были расширены и углублены, но центр тяжести применений линейного программирования сместился в область экономики. Чтобы дать читателю понятие о разнообразии применений линейного программирования, в этом параграфе будут вкратце описаны многие из этих приложений. Хотя излагаемый материал заимствуется из различных источников, мы не будем в тексте этого параграфа приводить соответствующих ссылок. Вместо этого мы сгруппировали в более удобном для чтения виде систему ссылок в библиографии. Кроме этого, в соответствующих местах предыдущих параграфов были приведены дополнительные ссылки. Полный список работ по линейному программированию читатель может найти в библиографии, составленной Релеем и Гассом [87]. В этой библиографии авторы подразделили приложения линейного программирования на не-

сколько классов. В дальнейшем мы будем придерживаться этой классификации.

1. Применения в сельском хозяйстве. Здесь приложения связаны с двумя направлениями: экономикой сельскохозяйственного производства и управлением фермой. Первое направление имеет дело с сельскохозяйственной экономикой в крупном масштабе, т. е. в масштабе государства или района, тогда как второе касается проблем индивидуальной фермы. Изучение сельскохозяйственной экономики привело к созданию модели «межрайонного равновесия», которая отличается от транспортной задачи тем, что цены на товар в каждом пункте отправления и назначения зависят не только от количеств товара, отправляемого и получаемого в каждом пункте, но также и от количеств, оставленных на хранение на местных складах. Такая эмпирическая модель сельскохозяйственной экономики была сформулирована применительно к десяти районам Соединенных Штатов. Хотя эта модель является грубым приближением к действительной экономике, она все же достаточно точна для получения данных, необходимых для предсказания устанавливающейся между районами разницы цен на сельскохозяйственные продукты, исходя из межрайонного их распределения. Эта модель позволяет также оценить тенденцию изменения стоимостей межрайонных перевозок сельскохозяйственных продуктов.

Основное применение линейного программирования к задачам управления фермой состояло в определении оптимального размещения ограниченных ресурсов, таких, как площадь земли, рабочая сила, водоснабжение, оборотный капитал и т. д., при котором чистый годовой доход достигает максимума. Задача заключалась в таком одновременном выборе культуры или культур, которые необходимо возделывать в рассматриваемом периоде, числа акров земли, отводимых под каждую из этих культур, а также индивидуального метода, используемого при возделывании каждой из них, при котором достигается максимум чистого дохода. Другая линейная модель более общей природы связана с выбором севооборота каждым фермером в отдельности. Это приложение было развито как в статической, так и в динамической форме.

Как описано в предыдущем параграфе, одной из первых задач, связанных с фермерским хозяйством, явилась проблема отыскания оптимального рациона для скота.



## II. Промышленные приложения.

**Химическая промышленность.** В химической промышленности применялись главным образом модели типа задачи планирования производства и хранения. Одно исследование было проведено для отыскания оптимального графика работы 25 аппаратов различной мощности, используемых для электрохимического покрытия протравленной алюминиевой фольги пленкой окиси алюминия. Технология покрытия фольги пленкой и выпускаемый ассортимент фольги связаны с 45 возможными вариантами толщины пленки покрытия и нагрузки электрической сети, причем каждый вариант требует соответствующего тока. Суммарный ток ограничивается характеристиками трансформаторного парка компании. Получающаяся задача планирования оказывается обычной моделью проблемы линейного программирования, учитывающей мощности аппаратов, ограничения электроэнергии и другие условия.

**Угольная промышленность.** Для угольной промышленности была сформулирована модель, состоящая из двух взаимосвязанных задач линейного программирования. Данными для модели являются потребности пунктов спроса в угле и стоимости доставки единицы угля от складов к этим пунктам. Переменными первой задачи служат величины соответствующих перевозок. Они выбираются таким образом, чтобы минимизировать суммарную стоимость перевозок, необходимых для удовлетворения всех потребностей при ограничениях, связанных с емкостями складов. Переменными второй задачи являются цены на доставленный в пункты спроса уголь и расходы, связанные с хранением угля на складах. Значения этих переменных выбираются так, чтобы максимизировать общий доход от продажи угля.

**Коммерческие авиалинии.** В этой области было проведено несколько исследований, связанных с оптимальным использованием самолетов на различных авиалиниях. В одной из работ методы линейного программирования были применены к задаче составления графика полетов в Шотландском районе Британских европейских авиалиний. В этом районе работало очень немного самолетов и экипажей, но получались сравнительно большие убытки. Сначала была определена оптимальная эксплуатационная политика, после чего была сформулирована статическая модель, описывающая полет от

одного пункта к другому как деятельность с линейными коэффициентами затрат и выхода. Затратами являются самолет, экипажи и деньги, а выход — самолет, экипажи и обслуживание. При динамическом расширении модели может быть учтено время дня.

Средства связи. Это — другая область, в которой было найдено очень немного приложений. Основной работой явился оптимальный выбор и использование средств связи. С помощью методов линейного программирования были решены задачи, связанные с обеспечением бесперебойности связи. Эти методы позволили сформулировать требования к системе, учитывающие в комплексе ограничения по пропускной способности, запросы абонентов и экономические факторы.

Металлургическая промышленность. Здесь было сформулировано несколько моделей, связанных с планированием производства предприятий рассматриваемой отрасли. Одно из таких исследований состояло в модели линейного программирования, касавшейся выпуска стали при минимальных затратах, причем модель была использована для определения оптимального графика работы мартеновского цеха, темпа выпуска горячего металла доменным цехом и количества и типа приобретаемого стального лома. Месячный план производства зависит от спроса на сталь по основным ее маркам, от количества и типа имеющегося в распоряжении литейного лома, а также от его цены и доступности на открытом рынке.

Сообщение о таких исследованиях, проведенных на крупном трубопрокатном предприятии, показало, что планирование на максимальный доход увеличило прибыли компании примерно на 350 000 долларов по сравнению с предшествующим годом. С другой стороны, планирование на максимальный выпуск увеличило его на 22%, но уменьшило доходы примерно на 23%, или 300 000 долларов. Увеличение дохода явилось прямым результатом выбора марок выпускаемых сталей с помощью линейного программирования. Учетными факторами были производственная мощность завода, заявки складов, тарифы перевозок стали к различным центрам ее распределения, а также настоящая и перспективная политика компании.

Бумажная промышленность. Два применения линейного программирования в бумажной промышленности

были связаны с транспортной задачей и задачей планирования. Транспортная задача возникла здесь в связи с необходимостью производства бумаги на фабриках, расположенных в различных районах. Задача заключалась в таком распределении заказов по этим фабрикам, при котором общая стоимость перевозок для компании уменьшалась до минимума. Задача внутрифабричного планирования была связана с уменьшением брака обрезки на бумагорезательных машинах. Предприятие изготовляло рулоны газетной бумаги, которые должны удовлетворять требованиям заказчика по ширине и диаметру. При нарезке таких заказанных рулонов на больших бумагорезательных барабанах получались потери бумаги. Здесь предприятие должно определить, на каких машинах и в каких комбинациях необходимо нарезать заказанные рулоны, чтобы свести общие потери к минимуму. Применение методов линейного программирования к этой задаче было успешным, что видно хотя бы из снижения брака обрезки более чем на 1,5%. Это эквивалентно увеличению выпуска на 15 тонн бумаги в день.

**Нефтяная промышленность.** В этой области имеется очень много важных и интересных приложений линейного программирования. Самым ранним из них явилась задача составления таких смесей нефтепродуктов, которые, удовлетворяя определенным техническим требованиям, приносят максимальный доход. Получающиеся конечные продукты должны обладать рядом оговоренных свойств, например заданным октановым числом и летучестью, причем чистый выход их должен быть максимальным. Другие исследования связаны с задачами оптимального распределения сырой нефти по различным нефтеперерабатывающим заводам и минимизации издержек при производстве и хранении сезонных нефтепродуктов. Математические модели процессов нефтепереработки и нефтехимии в основном привели к изучению и решению многих задач нелинейного программирования.

**Транспорт и железные дороги.** Здесь линейная модель была сформулирована применительно к составлению оптимального графика движения поездов по железной дороге, связывающей большие узловые станции. Условия модели учитывали факторы найма и оплаты кондукторов, планирования перевозок и ограничений пропускной способности.

дороги. Целью проведенного исследования явилось сведение к минимуму общего количества обслуживающих бригад, а также затрат на обслуживание подвижного состава.

Другое применение, связанное с работой железнодорожного транспорта, касалось распределения зафрахтованных вагонов между пунктами погрузки, приводящего к оптимальному плану погрузочных работ.

III. Экономические исследования. Использование методов линейного программирования в области экономики не ограничивается межпромышленной моделью Леонтьева, описанной в § 2. Другим важным приложением является интерпретация в терминах линейного программирования теории фирм. Здесь мы имеем дело с отысканием программы производства, которая увеличит, насколько возможно, доходы фирмы и ограничена лишь тем, что не должна требовать больших ресурсов, чем имеется в распоряжении фирмы.

Задача выбора комплекта акций также может быть исследована методами линейного программирования. Здесь мы отправляемся от некоторых соображений, касающихся надежности акций, и кончаем выбором комплекта.

Помимо задачи о диете, рассмотренной в § 3, в виде задач линейного программирования были сформулированы многие проблемы торговли. Одна такая модель, сформулированная для описания поведения покупателей продуктов питания, основывалась на экспериментальных данных, заимствованных из списков Британского министерства продовольствия. В этих списках были отражены продовольственные закупки приблизительно тысячи домашних хозяйств горожан-рабочих. Эти данные были использованы для определения среднего распределения закупок пищи и средней стоимости закупки, а также для выявления количеств питательных веществ, содержащихся в средней закупке. При исследовании виды пищи были разделены на 15 групп, число учитывавшихся питательных веществ равнялось 12. Были подсчитаны стоимости каждой из четырех диет, удовлетворяющих специальным комплексам требований, после чего эти результаты были сравнены с данными списка Британского министерства продовольствия.

Специальные случаи теории размещения заводов (выбор городов для фабрик или отраслевых складов с целью увеличения доходов до максимума) также были исследованы

с помощью методов линейного программирования. В одном примере учитывалось поведение конкурента; этот пример был сформулирован в виде эквивалентной игры двух партнеров с нулевой суммой.

IV. Военные приложения. Одной из первых моделей линейного программирования послужила здесь задача воздушного моста, ограничения которой включали виды снабжения Берлина, пропускную способность аэродромов, число экипажей, самолетов и финансовые возможности. Цель заключалась либо в перевозке обусловленного числа тонн по минимальной цене, либо в максимизации тоннажа перевозок при заданных количествах самолетов и денег.

Другим приложением, связанным с военно-воздушными силами, явилась задача развертывания авиации, состоящая в эффективном распределении самолетов и экипажей. Здесь известно число самолетов, которые согласно программе должны быть выпущены авиационной промышленностью в последующие месяцы. Эти самолеты либо сразу вступают в строй, либо используются для обучения экипажей. Самолеты вступают в строй только тогда, когда они укомплектованы экипажами, и остаются после этого на базе, к которой они прикреплены. Самолеты, отводимые для обучения экипажей, могут вступать в строй только по прошествии нескольких месяцев. Каждый самолет, предназначенный для обучения, используется для ежемесячного выпуска заданного числа экипажей. Целью задачи является такое распределение новых самолетов на вступающие в строй и используемые для обучения экипажей, при котором максимизируется общее число ежемесячно вступающих в строй самолетов.

Задача поставщика (см. упражнение 2) является перефразировкой военной задачи, которая появилась в связи с оценкой потребностей резервирования боевой авиации.

Другими примерами военных приложений служат задача выбора такой системы укомплектования авиационных соединений для борьбы против партизан, при которой можно было бы локализовать их действия при минимальном расходе авиационного бензина; видоизменение транспортной задачи, связанное с максимизацией общего тоннажа бомб, сбрасываемых на заданную систему целей, и проблема защиты населения, решение которой определяет несколько защитных мер, которые необходимо принять при данной атаке для обеспе-

чения как требуемого уровня защиты, так и минимума возможных затрат.

V. Назначение персонала. Общая постановка задачи о назначении персонала приведена в гл. 10. Специальная динамическая постановка этой задачи была сформулирована применительно к такому назначению сборщиков пошлин, при котором заданное число контор по сбору налогов можно укомплектовать минимальным для данного отрезка времени числом людей.

VI. Планирование производства и хранения. Основная формулировка задачи планирования производства и хранения обсуждалась в § 1. Там мы рассмотрели задачу сглаживания производственного процесса, обеспечивающего удовлетворение обусловленных требований таким способом, при котором сводятся к минимуму расходы на хранение излишков. Этой задаче предшествовало исследование методами линейного программирования аналогичной задачи, в которой рассматривалась проблема товарных складов. Проблема заключалась в оптимальном использовании товарных складов при колебаниях цен на хранящийся продукт. Приведенная задача была усложнена учетом хранения различных продуктов, цены на которые колеблются.

С помощью методов линейного программирования исследовалась также задача регулирования поточной сборки. Основная проблема здесь заключается в следующем:

Собираемый агрегат состоит из многих различных деталей. Сборка проводится в некоторой оговоренной последовательности или системе последовательностей. Каждый рабочий должен быть снабжен таким набором инструментов и количеством деталей для сборки, чтобы общее время, затрачиваемое им для выполнения работы, было не более темпа сборки, т. е. отрезка времени между прохождением через одно рабочее место двух соседних собираемых агрегатов при их движении по сборочной линии. Рабочий имеет свободное время, если затрачиваемое им на работу время меньше темпа сборки. Набор операций для каждого рабочего должен быть составлен таким образом, чтобы свести к минимуму его свободное от работы время.

Видоизменением этой задачи является анализ работы узловой сборочной линии. Здесь известно общее число узлов, которые сначала собираются на одном конвейере, потом

переходят на второй и т. д. и, наконец, поступают на сборочную линию. На монтируемом агрегате в каждый данный момент может устанавливаться только один узел. Для каждого узла известно время, затрачиваемое на его установку, и время, расходуемое на его собственную сборку. Задача заключается в определении такого графика выпуска узлов на сборочную линию, при котором общее время прохождения по ней монтируемого агрегата (цикл сборки) будет минимальным.

Другие применения охватывают задачу определения числа требуемых деталей, которые должны производиться механическими цехами таким образом, чтобы общая стоимость производства была минимальной и чтобы темп выпуска и технические условия на детали были выдержаны при использовании существующего оборудования.

VII. Применение при конструировании. Задачи в этой области охватывают линеаризацию технических задач, относящихся к теории пластичности и расчету конструкций. С помощью принципа минимума — максимума можно вычислить критическое значение параметра нагрузки, при которой происходит пластическая деформация при различных видах нагрузки. Принцип максимума различными путями можно свести к задаче максимизации линейной формы при линейных неравенствах. Задача конструирования фюзеляжа самолета при условии минимальности его веса может быть сформулирована в виде линейной модели.

VIII. Регулировка уличного движения. Здесь применение модели линейного программирования связано с решением задачи планирования сигналов уличного движения. Математическая формулировка модели уличной световой сигнализации предполагает известными следующие данные: общий цикл сигнализации движения (красный свет плюс зеленый свет), часть цикла, при которой движение перекрывается на каждом перекрестке, и максимальное число экипажей, которые могут одновременно пересекать перекрестки дорог в каждом направлении.

Модель может учитывать такие факторы, как изменения средней скорости на различных участках маршрута, задержки в пути, изменения пропускной способности дорог в направлении движения, вместимость стоянок транспорта, замена двухцветной сигнализации на трехцветную и задержки

движения перед светофорами. Критерием достижения оптимальности времени цикла сигнализации является минимум числа задержек.

IX. Транспортная задача и теория сетей. Обсуждение транспортной задачи и некоторых ее видоизменений было проведено в гл. 10. Математическая модель транспортной задачи успешно применялась в ряде конкретных проблем. Одной из таких проблем является задача максимизации потока в сетях средств сообщения. Рассмотрим такую сеть (например, железную дорогу, шоссе, связь), соединяющую две данные точки через несколько промежуточных точек, где каждое звено сети характеризуется числом, выражающим его пропускную способность. Пусть надо найти максимальный поток от одной точки к другой, предполагая процесс установившимся. Для решения этой задачи был развит простой вычислительный процесс, основанный на симплексном методе.

Обобщением основной транспортной задачи является также транспортно-перегрузочная задача. Здесь при поисках оптимального плана любой пункт отправления и назначения рассматривается как промежуточный.

X. Задача коммивояжера. Перед коммивояжером, отправляющимся из данного города, встает проблема, заключающаяся в выборе наикратчайшего маршрута, по которому он посетит каждый из намеченных городов, после чего вернется в исходную точку отправления. Вычислительного процесса для этой задачи в общей постановке пока не найдено, хотя некоторые частные случаи были решены при помощи методов линейного программирования. В частности, задача объезда 49 городов, один из которых находится в округе Колумбия, а каждый из остальных — в одном из 48 штатов, была сформулирована и решена как модель линейного программирования.

XI. Другие области применения линейного программирования. Дополнительные приложения связаны с повышением эффективности работы гидроузла. Задача состоит в определении такого регулирования водного баланса гидроузла, включающего шесть плотин на реке Миссури, при котором достигается максимум энергии, вырабатываемой этим узлом. Физические ограничения на подъемы и спуски уровня воды проявляются в форме неравенств.



С определенной степенью точности можно положить, что изменение энергии является линейной функцией изменения уровня воды.

Наряду с широким кругом применений методов линейного программирования к физическим ситуациям эти методы тесно связаны с некоторыми теоретическими областями математики. Некоторые из этих приложений привели к построению методов для решения специальных типов задач программирования. Например, математическая статистика была применена к решению задачи, элементы которой искажены случайными ошибками. Более важной является, однако, возможность использования методов линейного программирования для доказательства различных теорем и решения задач из ряда областей математики, что представляет неограниченное поле для исследований. Теоретические и вычислительные аспекты линейного программирования были применены с большим успехом к комбинаторному анализу, теории частично упорядоченных множеств, теории связи и теории графов. Поскольку для описания указанных приложений потребуется вводный материал, лежащий за пределами возможностей и целей этой книги, предлагаем интересующемуся читателю самому изучить специфические детали этих математических приложений линейного программирования. Соответствующие ссылки даны в пункте 12 библиографии.

### У п р а ж н е н и я

1. Решить задачу планирования производства, используя уменьшенную систему уравнений с исходными условиями  $s_{-1}=0$ ,  $s_n=0$ ,  $r_0=0$ . Минимизируемой линейной формой является

$$16s_0 + \sum_{t=1}^4 s_t + 15 \sum_{t=1}^5 y_t,$$

ограничениями задачи:

$$r_1=5, \quad r_2=12, \quad r_3=6, \quad r_4=6, \quad r_5=8.$$

2. Сформулировать следующую проблему, заимствованную из работы Джекобса [62], как задачу линейного программирования.

Поставщику провизии известно, что вместе с едой, которой он должен обеспечивать клиентов в течение последующих  $n$  дней, ему необходимо поставлять каждый  $j$ -й день  $r_j$  ( $\geq 0$ ) чистых салфеток ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Стирка обычно длится  $p$  дней, т. е. гряз-

ная салфетка, будучи отправлена в прачечную немедленно после использования в  $j$ -й день, возвращается обратно в  $(j+p)$ -й день. Однако за повышенную плату прачечная может обработать салфетки за  $q < p$  дней ( $p, q$  — целые числа). Не имея в первоначальный момент салфеток ни в наличии, ни в прачечной, поставщик должен обеспечить свои первоначальные потребности приобретением салфеток по  $a$  центов за штуку. Стоимость стирки составляет при обычном и срочном обслуживании  $b$  и  $c$  центов за салфетку соответственно. Как должен поставщик распорядиться имеющимися у него средствами, чтобы удовлетворить свои потребности и свести к минимуму издержки за  $n$  дней?

3. Дана следующая таблица затрат и выпуска размерами  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неизвестный вектор производства  $X$  трех отраслей промышленности, неизвестный вектор ассортимента  $Y$ , неизвестный вектор окончательных запасов  $S_1$  и известный вектор исходного запаса  $S_0$  связаны соотношением

$$(I - A)X = Y + S_1 - S_0.$$

Вектор производства ограничивается известным вектором предельных уровней производства  $L$ , так что  $X \leq L$ . Здесь

$$S_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } L = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Написать точные уравнения системы для трех отраслей промышленности и определить значения  $X, Y$  и  $S_1$ , максимизирующие  $cY$ , где  $c = (1, 5, 15)$ . Здесь задача заключается в определении не только вектора производства, но также и соответствующего «оптимального» ассортимента.

## ГЛАВА 12

### ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ИГР

Подобно линейному программированию теория игр также является одной из современных областей математики. Если при исследовании общей задачи линейного программирования мы определяли способ эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей, то в теории игр нас интересует стратегия, с помощью которой достигается выигрыш, максимально возможный в данной игре. В то время, когда закладывались основы теории игр, замечательное соответствие между этими двумя задачами не было известно. Связь между линейным программированием и теорией игр впервые была установлена фон Нейманом и Данцигом. В настоящей главе устанавливается эквивалентность общей задачи линейного программирования и произвольной игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом стратегий.

#### § 1. Введение в теорию игр

Основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы, поставленной фон Нейманом\*): «Если  $n$  партнеров  $P_1, P_2, \dots, P_n$  играют в данную игру  $\Gamma$ , то как должен вести партию  $i$ -й игрок для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?»

Заметим, что под термином *игра* понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий игры, а термин *партия* связан с частной возможной реализацией этих правил. В дальнейшем предполагается, что в конце каждой

---

\*) См. работу Куна [67].

партии игры каждый игрок  $P_i$  получает сумму денег  $v_i$ , называемую *выигрышем* этого игрока. При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью максимизации общей суммы получаемых им денег. В большинстве салонных игр, например покере, общая сумма денег, теряемых проигравшими игроками, равна сумме денег, получаемых выигравшими партнерами. В этом случае для любой партии

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0.$$

Отметим, что число  $v_i$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю, причем  $v_i > 0$  соответствует выигрышу,  $v_i < 0$  — проигрышу и  $v_i = 0$  — ничейному исходу. Игры, в которых алгебраическая сумма выигрышей равна нулю, называются играми с нулевой суммой. В этих играх средства переходят от одного партнера к другому, не поступая извне. Примером игры с ненулевой суммой может служить покер, в котором определенный процент банка отчисляется «дому» перед окончательной расплатой.

Игры также классифицируются по числу игроков и числу возможных ходов. Шахматы являются игрой двух партнеров с конечным числом возможных ходов, покер — игрой многих партнеров также с конечным числом возможных ходов\*). Дуэль, в ходе которой дуэлянты могут стрелять друг в друга в любой момент данного отрезка времени, служит примером игры двух партнеров с бесчисленным множеством возможных ходов. Игры, далее, можно подразделить на кооперативные и некооперативные. В первых играх партнеры имеют возможность образовывать коалиции и играть как команды, тогда как в последних каждого игрока интересует лишь его собственный результат. Игры двух партнеров являются, разумеется, некооперативными. В дальнейшем мы будем обсуждать только игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов.

Рассмотрим простейший пример такой игры. Первый игрок  $P_1$  выбирает одну из двух сторон монеты. Второй партнер, не зная выбора первого, также выбирает одну из ее сторон. После того как оба игрока произвели свой выбор,  $P_2$  пла-

---

\*) Здесь в условия игр включено соответствующее правило окончания партии.

тит 1 игроку  $P_1$ , если выбранные стороны совпали, и  $-1$  в противном случае. Здесь 1 соответствует выигрышу первым игроком одной единицы, а  $-1$  соответствует проигрышу им одной единицы. В этом предположении мы говорим, что  $P_1$  играет на максимум, а  $P_2$  — на минимум. В последующем изложении мы всегда будем считать  $P_1$  играющим на максимум и записывать платежи в форме его выигрыша.

Постановку изложенной задачи можно записать в виде следующей таблицы (Кун [67]):

		Выборы игрока II	
		«Орел»	«Решка»
Выборы игрока I	«Орел»	1	$-1$
	«Решка»	$-1$	1

Таким образом, условия игры полностью определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

строки которой соответствуют возможным выборам для  $P_1$ , а столбцы — возможным выборам для  $P_2$ . Как только  $P_1$  выбирает строку и  $P_2$  — столбец, партия заканчивается и партнер  $P_1$  выигрывает величину, стоящую на пересечении выбранных строки и столбца.

После того как  $P_1$  произвел выбор, он должен держать его в секрете от  $P_2$ , так как в противном случае  $P_2$  выберет столбец, связанный с платежом, равным  $-1$ .  $P_1$  может сделать свой выбор случайным образом. Например, он может поместить в шляпу два листка бумаги, один из которых помечен буквой «О», а другой — «Р». Перед каждой партией  $P_1$  вынимает из шляпы одну из помеченных бумажек. Если при этом оказывается, что бумажка помечена буквой «О»,  $P_1$  выбирает орла, в противном случае — решку. Вероятность выбора партнером  $P_1$  орла равна  $\frac{1}{2}$ , вероятность выбора решки

также равна  $\frac{1}{2}$ . Предположим, что игрок  $P_1$  делает свой выбор именно таким образом. Если  $P_2$  выбирает орла, то  $P_1$

имеет математическое ожидание выигрыша (т. е. сумму произведений вероятности выбора каждой строки на соответствующий выигрыш), равное

$$\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0.$$

Если  $P_2$  выбирает решку, математическое ожидание выигрыша для  $P_1$  равно

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0.$$

Следовательно, средний выигрыш  $P_1$  равен нулю. Указанная тактика игры для  $P_1$  является единственной, не связанной с риском среднего проигрыша. Чтобы показать это, предположим, что  $P_1$  выбирает орла с вероятностью  $x$  и решку — с вероятностью  $(1-x)$ , где  $0 \leq x \leq 1$ . Если  $P_2$  выбирает орла, то средний выигрыш для  $P_1$  равен

$$E_O = x(1) + (1-x)(-1) = 2x - 1,$$

если же  $P_2$  выбирает решку, математическое ожидание выигрыша для  $P_1$  равно

$$E_P = x(-1) + (1-x)(1) = 1 - 2x.$$

При  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $E_O < 0$  и при  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ,  $E_P < 0$ . Следовательно, для достижения нулевого значения математического ожидания выигрыша  $P_1$  должен выбирать орла и решку с равной вероятностью. То же самое справедливо и для  $P_2$ .

Обобщая рассмотренный пример, приходим к следующим определениям.

Определение 1. Матричная игра  $\Gamma$  определяется любой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

с  $m$  строками и  $n$  столбцами, каждый элемент которой является произвольным действительным числом. Матрица  $A$  называется *матрицей выигрышей* (для первого игрока). Элемент  $a_{ij}$

представляет сумму, уплачиваемую игроком  $P_2$  игроку  $P_1$ , если  $P_1$  выбирает ход, соответствующий  $i$ -й строке, и  $P_2$  выбирает ход, связанный с  $j$ -м столбцом.

Определение 2. Под *смешанной стратегией* игрока  $P_1$  мы будем понимать такой вектор-строку  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  с неотрицательными компонентами  $x_i$ , что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1.$$

Аналогично под смешанной стратегией для  $P_2$  понимается такой вектор-столбец  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  с неотрицательными компонентами  $y_j$ , что

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1.$$

Элементы  $x_i$  и  $y_j$  представляют соответственно частоты, с которыми  $P_1$  выбирает свой  $i$ -й ход (строку) и  $P_2$  выбирает свой  $j$ -й ход (столбец). В рассмотренном выше примере смешанными стратегиями игрока  $P_1$ , в частности, являются  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .  $P_2$  может использовать аналогичные смешанные стратегии.

Определение 3. Для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$  смешанная стратегия,  $i$ -я компонента которой равна 1, а остальные — нулю, называется  *$i$ -й чистой стратегией* игрока  $P_1$  и обозначается через  $i$ . Аналогично  $j$ -я чистая стратегия игрока  $P_2$ , обозначаемая через  $j$ , имеет все компоненты, кроме  $j$ -й, равной 1, равными нулю.

Рассмотрим теперь матричную игру, определяемую матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если партнер  $P_1$  выбирает любую чистую стратегию  $i$ , он уверен, что выиграет по крайней мере  $\min_j a_{ij}$ . Например, если матричная игра задается следующей матрицей выигрыша размером  $3 \times 4$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

мы имеем:

$$\min_j a_{1j} = a_{13} = 0, \quad \min_j a_{2j} = a_{22} = 1, \quad \min_j a_{3j} = a_{33} = -1. \quad (1.1)$$

Поскольку партнер  $P_1$  может выбрать любое  $i$ , он, в частности, может выбрать такое  $i$ , при котором его гарантированный выигрыш достигнет максимума. Иными словами, он может выбрать такую чистую стратегию  $i$ , при которой  $\min_j a_{ij}$  достигает максимума. При использовании этой чистой стратегии  $P_1$  может выиграть не менее  $\max_i \min_j a_{ij}$ . Для выписанной только что матрицы, учитывая (1.1), получаем:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 1.$$

Если  $P_2$  выбирает  $j$ , то наихудшее, что может с ним случиться, заключается в проигрыше  $\max_i a_{ij}$ .  $P_2$  может тогда выбрать чистую стратегию, при которой минимизируется его проигрыш. При использовании этой чистой стратегии  $P_2$  может быть гарантирован, что  $P_1$  не сможет выиграть больше, чем  $\min_j \max_i a_{ij}$ . Для нашей матрицы размером  $3 \times 4$

$$\begin{aligned} \max_i a_{i1} = a_{31} = 4, & \quad \max_i a_{i2} = a_{12} = 5, \\ \max_i a_{i3} = a_{33} = 3, & \quad \max_i a_{i4} = a_{14} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{и } \min_j \max_i a_{ij} = a_{23} = 3.$$

Если

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \quad (1.2)$$

то  $P_1$  может быть уверен в выигрыше  $v$  и вместе с тем партнер  $P_2$  может добиться того, чтобы его проигрыш не превышал  $v$ . Любая матричная игра, для которой справедливо соотношение (1.2), будет наилучшим образом разыгрываться партнерами  $P_1$  и  $P_2$ , избирающими соответствующие чистые стратегии. Поскольку при любом отклонении игрока  $P_1$  от этой стратегии его гарантированный выигрыш не увеличивается (а возможно, и уменьшается) и поскольку любое отклонение второго партнера от своей чистой стратегии не уменьшает его проигрыша (а, возможно, увеличивает его),



указанные чистые стратегии естественно назвать оптимальными чистыми стратегиями.

Следующая матричная игра является одной из тех игр, которые имеют оптимальные чистые стратегии:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 3$ , а оптимальными чистыми стратегиями являются  $X = (1, 0, 0)$ ;  $Y = (1, 0, 0)$ .

Читатель, видимо, заметил, что элемент  $a_{11}$  является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Любой такой элемент называется *седловой точкой*. Если элемент  $a_{kl}$  является седловой точкой, то чистые стратегии  $k$  и  $l$  для  $P_1$  и  $P_2$  соответственно являются оптимальными чистыми стратегиями и  $a_{kl} = v$ .

Поскольку не все матричные игры могут оптимально разыгрываться при помощи чистых стратегий (например, рассмотренная выше игра, заключающаяся в выборе стороны монеты), необходимо ввести понятие оптимальной смешанной стратегии.

**Определение 4.** *Функция выигрыша* для игрока  $P_1$ , т. е. математическое ожидание выигрыша этого игрока, определяется как

$$E(X, Y) = XAY = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j,$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  и  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — произвольные смешанные стратегии для  $P_1$  и  $P_2$  соответственно.

Для иллюстрации этого определения рассмотрим игру, задаваемую следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если  $P_1$  выбирает смешанную стратегию  $X = (x_1, x_2, x_3)$  и  $P_2$  — смешанную стратегию  $Y = (y_1, y_2, y_3)$ , то  $E(X, Y)$  равно

матричному произведению

$$(x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

или  $E(X, Y) = (x_2 - x_3)y_1 + (-x_1 + x_3)y_2 + (x_1 - x_2)y_3$ .  
Если  $X = (0, 1; 0, 4; 0, 5)$  и  $Y = (0, 3; 0, 3; 0, 4)$ , то

$$E(X, Y) = -0,03.$$

Следовательно, если  $P_1$  и  $P_2$  используют эти смешанные стратегии в ряде партий игры, то  $P_1$  может ожидать проигрыша 0,03 единицы.

Определение 5. *Решением* матричной игры  $\Gamma$  называется такая пара смешанных стратегий

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m), \\ \bar{Y} &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \end{aligned}$$

и действительное число  $v$ , что

$$E(\bar{X}, j) \geq v \text{ для чистых стратегий } j = 1, 2, \dots, n,$$

$E(i, \bar{Y}) \leq v$  для чистых стратегий  $i = 1, 2, \dots, m$ . Векторы  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  называются *оптимальными стратегиями*, а число  $v$  — *ценой* игры.

Из этого определения видно, что если  $P_1$  выбирает ходы, сообразуясь со своей оптимальной стратегией, то, независимо от ходов, которые выберет  $P_2$ , он может рассчитывать при длительной игре выиграть по крайней мере  $v$  единиц. Аналогичное заключение справедливо и для  $P_2$ : если он будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то при длительной игре проиграет не более  $v$  единиц. Отметим, что  $v$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю числом. Для игры, связанной с выбором стороны монеты, матрица выигрыша для которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

цена игры равна нулю, а оптимальными стратегиями являются

$$\bar{X} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ и } \bar{Y} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Следующая игра, приведенная в работе Куна [67], игра в жулика, является примером игры, на первый взгляд кажущейся бесприигрышной для обоих партнеров, т. е. имеющей цену  $v=0$ . Каждому из двух партнеров выдается по тузу бубен и треф.  $P_1$  получает также бубновую двойку, а  $P_2$  — трефовую. При первом ходе  $P_1$  выбирает и откладывает одну из своих карт, и  $P_2$ , не знаящий выбора карты партнером  $P_1$ , также откладывает одну свою карту. Если были отложены карты одной масти, выигрывает  $P_1$ , в противном случае выигравшим считается  $P_2$ . Размер выигрыша определяется картой, отложенной победителем (тузу приписывается одно очко, двойке — два). Если отложены две двойки, выигрыш равен нулю. Матрица выигрышей этой игры имеет такой вид:

$$\begin{array}{c} \diamond \quad \spadesuit \quad 2\clubsuit \\ \diamond \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ \spadesuit \end{array}.$$

Поскольку каждый элемент третьей строки не менее соответствующего элемента первой строки, игроку  $P_1$  не имеет смысла использовать первую стратегию. Следовательно, можно считать  $x_1=0$ . В этом случае можно сказать, что стратегия 3 доминирует над стратегией 1. Таким образом, из матрицы выигрыша можно исключить первую строку. Получаем матрицу

$$\left( \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$P_2$  может также произвести аналогичное исследование, связанное с сокращением матрицы выигрышей, и поскольку элементы второго столбца менее или равны соответствующим элементам третьего столбца,  $y_3=0$ . Окончательная матрица выигрышей имеет такой вид:

$$\left( \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right).$$

Исследование игры следует начать с выяснения того, имеет ли матрица выигрышей седловую точку. В данном слу-

чае седловой точки не существует. Если  $P_1$  выбирает свою вторую стратегию с вероятностью  $x$ , а третью — с вероятностью  $(1 - x)$  и если  $P_2$  применяет свою первую стратегию с вероятностью  $y$ , а вторую — с вероятностью  $(1 - y)$ , то

$$E(X, Y) = (-3x + 2)y + (2x - 1)(1 - y).$$

Читатель легко может проверить, что оптимальное решение исходной игры задается векторами  $X = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ,  $Y = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$  и  $E(X, Y) = v = \frac{1}{5}$ . Следовательно, эта игра более выгодна для  $P_1$ . Читатель может также легко проверить, что для любых других возможных смешанных стратегий  $X = (0, x, 1 - x)$  и  $Y = (y, 1 - y, 0)$

$$E(X, \bar{Y}) \leq E(\bar{X}, \bar{Y}) \leq E(\bar{X}, Y)$$

или  $\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = v^*$ . Иными словами, если  $P_1$  избирает свою оптимальную смешанную стратегию, а серия партий достаточно длинна, ему гарантирован, независимо от стратегии  $Y$ , применяемой партнером  $P_2$ , выигрыш, не меньший, чем  $E(\bar{X}, \bar{Y})$ . Аналогично, если игрок  $P_2$  избирает свою оптимальную смешанную стратегию, то при достаточно большом количестве партий он может быть застрахован от проигрыша, большего, чем  $E(X, Y)$ . Если оба партнера изберут свои оптимальные стратегии, то может быть предсказан вероятный исход игры.

Определение 6. *Симметричная игра* имеет кососимметрическую матрицу, т. е.  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

Покажем, что цена симметричной игры равна нулю и что оптимальные стратегии обоих игроков совпадают. Функция выигрыша для  $P_1$  задается выражением

$$E(X, Y) = XAY = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j.$$

Легко проверить, что в случае кососимметричной матрицы  $A$  и  $X = Y$

---

\*) Вывод этих соотношений для общего случая см. в работе Куна [67].

$$E(X, Y) = XAY = 0.$$

Следовательно, если оба игрока принимают одинаковую смешанную стратегию, то математическое ожидание выигрыша для каждого из них равно нулю. Обозначим оптимальные стратегии первого и второго партнеров соответственно через  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ . Имеем:

$$\max_X \min_Y XAY = \min_Y \bar{X}AY = v.$$

Если игрок  $P_2$  использует любую смешанную стратегию, то  $\bar{X}AY \geq v$ . Но мы знаем, что  $\bar{X}AY = 0$  при  $Y = \bar{X}$ . Следовательно,

$$0 = \bar{X}A\bar{X} \geq v.$$

Аналогично

$$\min_Y \max_X XAY = \max_X XA\bar{Y} = v.$$

Если  $P_1$  использует любую смешанную стратегию  $X$ , то  $XA\bar{Y} \leq v$ . Для  $X = \bar{Y}$  получаем  $\bar{Y}A\bar{Y} = 0$ , откуда

$$0 = \bar{Y}A\bar{Y} \leq v.$$

Итак, с одной стороны  $v \leq 0$ , с другой стороны  $v \geq 0$ . Следовательно,  $v = 0$  и оба игрока имеют одинаковые оптимальные стратегии  $\bar{X} = \bar{Y}$ .

В качестве примера симметричной игры рассмотрим матричную формулировку популярной игры «камень, бумага, ножницы». В этой игре двух партнеров с нулевой суммой оба игрока одновременно и независимо друг от друга выбирают камень, бумагу или ножницы. Комбинация бумаги и камня соответствует выигрышу одной единицы тем из игроков, который выбрал бумагу (камень может быть обернут бумагой); камень и ножницы дают тот же выигрыш партнеру, назвавшему камень (камень ломает ножницы); наконец, комбинация бумага — ножницы дает победу ножницам (ножницы режут бумагу). Выбор одинаковых предметов соот-

ветствует ничейному исходу партии. Матрица выигрышей для этой игры имеет такой вид:

$$\begin{array}{c} \text{Камень} \\ \text{Бумага} \\ \text{Ножницы} \end{array} \begin{pmatrix} \text{Камень} & \text{Бумага} & \text{Ножницы} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальная стратегия для обоих партнеров равна  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

В следующем параграфе потребуется изменять цену игры  $v$  за счет прибавления фиксированной величины  $w$  к каждому элементу матрицы выигрышей  $(a_{ij})$ . В этой связи мы хотим показать, что оптимальные стратегии игры с матрицей выигрышей  $(a_{ij} + w)$  остаются теми же, что и для игры с исходной матрицей выигрышей  $(a_{ij})$ . Что касается цены новой игры, то она равна  $v + w$ , где  $v$  — цена игры с матрицей  $(a_{ij})$ .

По определению

$$E_1(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j \quad (1.3)$$

для исходной игры и

$$E_2(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i (a_{ij} + w) y_j \quad (1.4)$$

для новой игры. Раскрывая (1.4), получаем

$$E_2(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j + w \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j. \quad (1.5)$$

Поскольку  $\sum x_i = \sum y_j = 1$ , из (1.5) следует

$$E_2(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j + w$$

или, учитывая (1.3),

$$E_2(X, Y) = E_1(X, Y) + \omega.$$

Мы видим, что постоянная  $\omega$  не будет играть никакой роли в выборе оптимальной стратегии преобразованной игры. Действительно, вторая игра совпадает с исходной, если  $P_2$  даст партнеру  $P_1$  до начала каждой партии  $\omega$  единиц вперед. Следовательно, оптимальные стратегии не изменятся и

$$E_2(\bar{X}, \bar{Y}) = E_1(\bar{X}, \bar{Y}) + \omega = v + \omega.$$

Выбирая соответствующую величину  $\omega$ , можно сделать положительными все элементы матрицы выигрыша и посредством этого обеспечить положительность цены преобразованной игры.

Сформулируем теперь без доказательства основную теорему матричных игр.

*Для каждой матричной игры  $\max_X \min_Y E(X, Y)$  и  $\min_Y \max_X E(X, Y)$  существуют и равны. Таким образом, каждая матричная игра имеет решение.*

Доказательство этой теоремы читатель может найти в работе Куна [67], а также в книгах Мак Кинси [72] и фон Неймана и Моргенштерна [80].

## § 2. Эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования

Предположим, что мы задались произвольной матричной игрой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Согласно определениям 4 и 5 задача игрока  $P_1$  заключается в отыскании такого вектора

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

и числа  $v$ , чтобы

$$\left. \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geqslant v, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geqslant v, \\ &\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geqslant v, \\ &x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, \\ &x_1 \geqslant 0, \\ &\quad x_2 \geqslant 0, \\ &\quad . \quad . \\ &\quad . \quad . \\ &\quad . \quad . \\ &x_m \geqslant 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Аналогично игроку  $P_2$  необходимо определить такой вектор

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

[illegible]

$$x'_i = \frac{x_i}{n}, \quad y'_i = \frac{y_j}{n}.$$



Заметим, что

$$\sum_i x'_i = \frac{1}{v} \sum_i x_i = \frac{1}{v},$$

$$\sum_j y'_j = \frac{1}{v} \sum_j y_j = \frac{1}{v}.$$

Поэтому игрок  $P_1$ , задача которого состоит в максимизации выигрыша, должен минимизировать  $\sum_i x'_i$ . Аналогично игрок  $P_2$  должен максимизировать  $\sum_j y'_j$ . В этих условиях можно выразить соотношения (2.1) и (2.2) в форме эквивалентных задач линейного программирования и получить следующие симметричные двойственные задачи.

И с х о д н а я з а д а ч а. Найти вектор  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ , который минимизирует

$$x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m$$

при условиях

$$a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{m1}x'_m \geq 1,$$

$$a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{m2}x'_m \geq 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_m \geq 1,$$

$$x'_i \geq 0.$$

Д в о й с т в е н н а я      з а д а ч а.      Определить      вектор  
 $Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ , который максимизирует

$$y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n$$

при условиях

$$a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n \leq 1,$$

$$a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + \dots + a_{2n}y'_n \leq 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \dots + a_{mn}y'_n \leq 1,$$

$$y'_i \geq 0.$$

Поскольку каждая игра имеет решение, оптимальные планы сформулированной двойственной пары задач линейного программирования существуют и

$$\min \sum_i x_i = \max \sum_j y_j = \frac{1}{v}^*).$$

Заметим, что если одна из задач двойственной пары решена симплексным методом, оптимальный план другой задачи содержится в заключительной симплексной таблице. Компонентами этого плана являются разности  $z_j - c_j$ , соответствующие дополнительным переменным решенной задачи.

Другой метод сведения игровой проблемы к задаче линейного программирования заключается в следующем. Для игрока  $P_1$  задача опять задается соотношением (2.1). Запишем первые  $n$  неравенств в виде равенств, вычитая из каждого неотрицательную переменную:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1} & = & v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - x_{m+2} & = & v, \\ \dots & & \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m - x_{m+n} & = & v, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m & = & 1, \\ x_i & \geqslant & 0. \end{array}$$

Вычитая затем первое уравнение из последующих  $n - 1$  уравнений и используя левую часть этого уравнения, равную  $\tau$ , в качестве линейной формы, получаем эквивалентную задачу линейного программирования, заключающуюся в максимизации

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = v$$

\*) Для того чтобы от векторов  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$  и  $Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ , являющихся оптимальными планами сформулированной двойственной пары задач линейного программирования, перейти к оптимальным смешанным стратегиям  $X, Y$  эквивалентной игры, следует разделить каждую компоненту векторов  $X'$  и  $Y'$

на  $\sum_{i=1}^m x'_i$  и  $\sum_{j=1}^n y'_j$  соответственно.



Вычитая затем первое уравнение из второго и третьего, получаем эквивалентную задачу линейного программирования, заключающуюся в максимизации

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{array}{rcll} -5x_1 + 5x_2 & + & x_4 - x_5 & = 0, \\ -7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 & - & x_6 & = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 & & & = 1, \\ x_i & \geq & 0. & \end{array}$$

В связи с тем, что вычислительные методы теории игр в применении к большим матричным играм связаны с чрезвычайно большим объемом вычислений, для решения подобных игр обычно применяются методы линейного программирования. Имеются, впрочем, достаточно быстро сходящиеся итеративные методы, дающие возможность решать игры со сколь угодно высокой точностью (Вильямс [101]).

Обратная проблема заключается в представлении данной задачи линейного программирования в форме матричной игры и легко решается с помощью рассмотрения соответствующей двойственной пары задач линейного программирования. Пусть условия исходной задачи выражены в виде неравенств

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n \geq f, \quad (2.4)$$

где  $x_j \geq 0$  и  $f$  совпадает с минимумом линейной формы (2.4). Задача, двойственная к сформулированной, имеет такой вид:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\omega_1 + \dots + a_{m1}\omega_m \leq c_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}\omega_1 + \dots + a_{mn}\omega_m \leq c_n, \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

$$b_1\omega_1 + \dots + b_m\omega_m \leq g, \quad (2.6)$$

где  $w_i \geq 0$  и  $g$  является максимумом линейной формы (2.6). Теорема двойственности (гл. 5) утверждает, что, если у одной

\*) Неравенство (2.8) эквивалентно формуле (1.13) гл. 5.

где  $\bar{x}_j = zx_j$ , а  $\bar{w}_i = zw_i$ . Из решения системы (2.10) при условии  $z > 0$  легко получить оптимальные планы обеих задач двойственной пары. Систему (2.10) можно переписать в следующей матричной форме:

$$(\bar{X}\bar{W}z) \begin{pmatrix} O & A' & -c' \\ -A & O & b' \\ c & -b & O \end{pmatrix} \geq O. \quad (2.11)$$

Здесь  $A$  — матрица размерами  $m \times n$ ,  $b, c, X$  и  $W$  — векторы-строки, а  $O$  —  $(m+n+1)$ -мерный нулевой вектор-столбец. Кососимметричную матрицу в формуле (2.11) можно рассматривать как матрицу некоторой симметричной игры двух лиц с нулевой суммой, а вектор-строку  $(\bar{X}\bar{W}z)$  — как смешанную стратегию партнера  $P_1$ , играющего на максимум. Поскольку цена симметричной игры равна нулю, из определения 5 следует, что решение системы неравенств (2.11) при

$$\sum \bar{x}_j + \sum \bar{w}_i + z = 1$$

является решением соответствующей игры.

По основной теореме теории игр решение этой игры всегда существует. Однако соответствующие задачи линейного программирования могут быть неразрешимы. Это произойдет в том случае, если в оптимальной стратегии упомянутой симметричной игры  $z = 0$ . Если же в оптимальной стратегии  $z > 0$ , то решения исходной и двойственной задач линейного программирования определяются по формулам

$$x_j = \frac{\bar{x}_j}{z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad w_i = \frac{\bar{w}_i}{z}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь вектор  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m, z)$  — оптимальная смешанная стратегия рассматриваемой симметричной игры.

Как пример приложения методов параметрического программирования к теории игр рассмотрим игру со следующей матрицей выигрыша:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \dots \lambda \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Параметр  $\lambda$ , который может принимать любое действительное значение, представляет выигрыш первого игрока (игрока, играющего на максимум) при использовании им своей первой стратегии.

Задача первого игрока состоит в определении такой смешанной стратегии  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , что

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + a_{31}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\geq v, \\ \lambda x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\geq v, \\ &\vdots \\ \lambda x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &\geq v, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m &= 1, \end{aligned}$$

где  $x_i \geq 0$ , а число  $v$  подлежит максимизации.

С помощью изложенного ранее приема данная игра может быть сведена к эквивалентной задаче линейного программирования, заключающейся в максимизации

$$\lambda x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = v$$

при условиях

$$\begin{aligned} (a_{32} - a_{21})x_2 + \dots + (a_{m2} - a_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+2} &= 0, \\ &\vdots \\ (a_{2n} - a_{21})x_2 + \dots + (a_{mn} - a_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+n} &= 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m &= 1, \end{aligned}$$

где  $x_i \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, m + n$ .

Полученная параметрическая задача линейного программирования может быть решена для всех возможных значений параметра  $\lambda$  способом, описанным в гл. 8.

Игры, связанные более чем с одной параметрической строкой, например

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \mu & \mu & \dots & \mu \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

также могут быть преобразованы к эквивалентным задачам линейного программирования. Однако эффективных вычислительных способов для решения задач линейного програм-

мирования с более чем одним параметром пока не найдено. Обсуждение вопросов, касающихся задач, линейная форма которых зависит от двух параметров, см. в работе Гасса и Саати [47].

### З а м е ч а н и я

Вводный материал по теории игр заимствован из работы Куна [67] и книги Мак-Кинси [72]. Материал § 2 взят из работы Данцига [19]. Для дополнительного чтения отсылаем читателя к работам фон Неймана и Моргенштерна [80] и Вильямса [101].

### У п р а ж н е н и я

1. Показать, что  $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$  для произвольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Выписать матрицу выигрышей и сформулировать эквивалентную задачу линейного программирования для следующей игры. Каждый игрок выбирает число из системы 1, 2, 3. Игрок, выбравший меньшее число, выигрывает 2 единицы, если разность выбранных чисел равна двум, если же эта разность равна 1, он проигрывает 4 единицы. Выбор одинаковых чисел соответствует ничейному исходу партии.

3. Преобразовать следующие матричные игры в эквивалентные им пары задач линейного программирования:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Выписать соответствующие матричные игры для следующих задач линейного программирования:

Требуется минимизировать

$$x_2 - x_3$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$



Требуется максимизировать

$$w_1 + w_2 + w_3$$

при условиях

$$w_1 + 4w_2 + 3w_3 \leq 1,$$

$$4w_1 + 4w_2 + 2w_3 \leq 1,$$

$$3w_1 - w_2 + 5w_3 \leq 1,$$

$$w_i \geq 0.$$

5. Решить следующую параметрическую игру для всех значений параметра

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ПО ПРИЛОЖЕНИЯМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Материал обзора приложений линейного программирования, изложенный в § 5 гл. II, заимствован из книги Vera Riley and Saul I. Gass, *Bibliography on Linear Programming and Related Techniques*, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958. Этот всесторонний библиографический указатель охватывает свыше 1000 наименований статей и работ, сгруппированных по разделам, например, по вводу, обзору, вычислительным методам, теории игр, выпуклым множествам и линейным неравенствам, приложениям и т. д. Перечень приложений линейного программирования, приведенный ниже, является лишь небольшой частью этого общего указателя.

### 1. Приложения к сельскому хозяйству

- Boles James N., *Linear Programming and Farm Management Analysis*, *Journal of Farm Economics* **37**, 1, стр. 1—24, февраль 1955.
- Candler Wilfred, *A Modified Simplex Solution for Linear Programming with Variable Capital Restrictions*, *Journal of Farm Economics* **38**, 4, стр. 940—955, ноябрь 1956.
- Fisher Walter D. and Leonard W. Shruben, *Linear Programming Applied to Feed-mixing under Different Price Conditions*, *Journal of Farm Economics* **35**, 4, стр. 471—483, ноябрь 1953.
- Fox Karl A. and Richard C. Taeuber, *Spatial Equilibrium Models of the Livestock-feed Economy*, *The American Economic Review* **45**, 4, стр. 584—608, сентябрь 1955.
- Fox Karl A. and Richard C. Taeuber, *A Spatial Equilibrium Model of the Livestock-feed Economy in the United States*. Работа представлена собранию Эконометрического общества, состоявшемуся 27 декабря 1952 г. в Чикаго, и опубликована в журнале *Econometrica* **21**, 4, стр. 547—566, октябрь 1953.
- Hildreth Clifford G., *Economic Implications of Some Cotton Fertilizer Experiments*. Работа представлена объединенному собранию Эконометрического общества и Американской ассоциации фермерской экономики, состоявшемуся в декабре 1953 г., и совещанию комиссии Коулса, состоявшемуся в январе 1954 г.; опубликована в журнале *Econometrica* **23**, 1, стр. 88—98, январь 1955.

- Hildreth Clifford G. and Stanley Reiter, On the Choice of a Crop Rotation Plan, стр. 177—188, опубликована в сборнике «Activity Analysis of Production and Allocation», Cowles Commission Monograph 13, под редакцией Купманса (труды конференции по линейному программированию, организованной комиссией Коулса 20—24 июня 1949 г. в Чикаго), изданном издательством John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
- King Richard A., Use of Economic Models: Some Applications of Activity Analysis in Agricultural Economics, Journal of Farm Economics 35, 5, стр. 823—833, декабрь 1953.
- Swanson Earl R., Integrating Crop and Livestock Activities in Farm Management Activity Analysis, Journal of Farm Economics 37, 5, стр. 1249—1258, декабрь 1955.

## 2. Заключение контрактов

- Percus Jerome and Leon Quinto, The Application of Linear Programming to Competitive Bond Bidding, Econometrica 24, 4, стр. 314—428, октябрь 1956.

## 3. Приложения к промышленности

### *а. Химическая промышленность*

- Arnoff E. Leonard, The Application of Linear Programming. Работа представлена Кливлендскому институту технологии Кейза 20—22 января 1954 г., опубликована в Proceedings of Conference on Operations Research in Production and Inventory Control, стр. 47—52, Кливленд, Огайо, 1954.
- Dannerstedt Gunnar and Hrand Saxenian, Machine Scheduling to Meet Seasonal Sales Variation, содержится в «Fundamental Investigations in Methods of Operations Research», MIT Interim Technical Report 1, стр. 12—13, 1 июля 1953—31 марта 1954.

### *б. Угольная промышленность*

- Henderson James M., A Short-run Model for the Coal Industry, Review of Economics and Statistics 37, 4, стр. 336—346, ноябрь 1955.

### *с. Коммерческие авиалинии*

- Morton George, Application of Linear Programming Methods to Commercial Airline Operations. Статья представлена четырнадцатому Европейскому собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Кембридже 13—15 августа 1952 г.; концептивно изложена в журнале Econometrica 21, 1, стр. 193, январь 1953.

*д. Средства сообщения*

Kalaba Robert E. and Mario L. Juncosa, Optical Design and Utilization of Communication Networks. Работа представлена объединенному совещанию Institute of Management Sciences и Operations Research Society of America, состоявшемуся в Калифорнийском университете, Лос-Анжелос, 30 мая 1956 г.; опубликована в отчетах P-782, The RAND Corporation, 25 стр., 13 июля 1956, и RM-1687, 22 стр., 23 апреля 1956, а также в журнале Management Science 3, 1, стр. 33—44, октябрь 1956.

*е. Металлургическая и сталелитейная промышленность*

Fabian Tibor, Application of Linear Programming to Steel Production Planning. Работа представлена седьмой национальной конференции Operations Research Society of America, состоявшейся 15—17 августа 1955 г. в Лос-Анжелосе; изложена конспективно в Journal of the Operations Research Society of America 3, 4, стр. 565, ноябрь 1955.

Reinfield Nyles V., Do You Want Production or Profit? Tooling and Production 20, 5, стр. 44—48, 69, август 1954.

*ф. Бумажная промышленность*

Paul A. E., Linear Programming, A Key to Optimum Newsprint Production. Работа представлена летней конференции технической секции Canadian Pulp and Paper Association, состоявшейся в Квебеке, Канада, 6—8 июня 1955 г.; опубликована в журнале Pulp and Paper Magazine of Canada 57, 1, стр. 85—90, январь 1956 г., переиздана там же 57, 4, стр. 145—150, март 1956.

*г. Нефтяная промышленность*

Charnes Abraham, William W. Cooper and Robert Mellon, Blending Aviation Gasolines — A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company. Работа представлена симпозиуму по линейному программированию и неравенствам, организованному совместно Air Force, DCS/Comptroller, Headquarters USAF и Национальным бюро стандартов 14—16 июня 1951 г. в Вашингтоне; опубликована в Project SCOOP, Manual 10, стр. 115—146 (включает ссылки) в апреле 1952 г.; опубликована также в журнале Econometrica 20, 2, стр. 135—159, апрель 1952, и конспективно изложена в журнале Operational Research Quarterly 3, 3, стр. 54—55, сентябрь 1952.

Davie J. W., Use of Linear Programming in Selective Blending Studies. Работа представлена летней конференции Эконометрического общества, состоявшейся в Монреале, Канада, 10—13 сентября 1954 г., конспективно изложена в журнале Econometrica 23, 3, стр. 336—337, июль 1955.

Manne Alan S., Concave Programming For Gasoline Blends, P-383, The RAND Corporation, 20 марта 1953. Работа представлена ежегодной конференции Operations Research Society of

- America, проведенной в институте технологии Кейза, Кливленд, Огайо, 15—16 мая 1953 г.; конспективно изложена в Journal of the Operations Research Society of America 1, 3, стр. 148, май 1953.
- Manne Alan S., Scheduling of Petroleum Refinery Operations, 181 стр. Harvard Economic Studies 48, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1956.
- Manne Alan S., Optimum Production Rates and Inventory to Meet Uncertain Seasonal Requirements. Производственно-технический отчет Esso Standard Oil Company, Linden N. J., опубликованный как гл. 6 (стр. 37—46) книги Linear Programming: The Solution of Refinery Problems, Esso Standard Oil Company, New York, 1955.
- Symonds Gifford H., A Crude Allocation Problem. Производственно-технический отчет Esso Standard Oil Company, Linden N. J., опубликован как гл. 9 (стр. 63—74) книги Manne Alan S., Linear Programming: The Solution of Refinery Problems, Esso Standard Oil Company, New York, 1955.
- Vazsonyi Andrew, Optimizing a Function of Additively Separated Variables Subject to a Simple Restriction, Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, II, стр. 453—469 (сборник статей, представленных конференции, организованной Национальным бюро стандартов и Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF. Конференция состоялась в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.).

#### *h. Железнодорожный транспорт*

- Charnes Abraham and M. H. Miller, A Model for Optimal Programming of Railway Freight Train Movements. Работа представлена конференции Эконометрического общества, состоявшейся 28—30 декабря 1955 г. в Нью-Йорке; реферирована в журнале Econometrica 24, стр. 349—350, июль 1956; полностью статья опубликована в журнале Management Science 3, 1, стр. 74—93, октябрь 1956.
- Crane Roger R., A New Tool: Operations Research, Modern Railroads 9, 1, стр. 146—152, январь 1954.

#### *i. Другие отрасли промышленности*

- Charnes Abraham, William W. Cooper and Robert O. Ferguson, Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, Management Science 1, 2, стр. 138—151, январь 1955.
- Schwan Harry T. and John J. Wilkinson, Linear Programming: What Can It Do? Chemical Engineering 63, стр. 211—214, август 1956.

### **4. Экономические исследования**

- Altschul Eugen, Reorientation in Economic Theory: Linear and Nonlinear Programming. Работа представлена ежегодной весенней конференции Missouri Section of the Mathematical Association of America, проведенной в Канзасском университете 22 ап-

- репя 1955 г., реферирована в журнале *American Mathematical Monthly* **62**, 6, стр. 543, июнь 1955.
- Beckmann Martin J. and Thomas Marschak, An Activity Analysis Approach to Location Theory, 38 стр., P-649, The RAND Corporation, 5 апреля 1955 г. Опубликовано в Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming I, стр. 331—379 (сборник статей, представленных конференции, организованной Национальным бюро стандартов и Directorate of Management Analysis Service, DSC/Comptroller, Headquarters USAF. Конференция состоялась в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.).
- Brown J. A. C., An Experiment in Demand Analysis: The Computation of the Manchester Computer. Работа представлена конференции по линейному программированию, устроенной Ferranti, Ltd., и состоялась в Лондоне 4 мая 1954 г.; опубликована в Conference on Linear Programming, стр. 41—53, Ferranti, Ltd., London, 1954; заключение приведено в журнале Operations Research (Jorsa) **4**, 1, стр. 133, февраль 1956.
- Charnes Abraham and William W. Cooper, An Example of Constrained Games in Industrial Economics. Работа представлена собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Вашингтоне 27—29 декабря 1953 г.; опубликована как ONR Research Memorandum 12, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa.; реферирована в журнале *Econometrica* **22**, 4, стр. 526—527, октябрь 1954.
- Chipman John, Linear Programming, The Review of Economics and Statistics **35**, 2, стр. 101—117, май 1953.
- Davidson Donald and Patrick Suppes, Experimental Measurement of Utility by Use of a Linear Programming Model, 30 стр., Technical Report 3, Applied Mathematics and Statistical Laboratory, Stanford University, 6 апреля 1956 г. Работа представлена собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Энн Арборе, Мичиган, с 29 августа по 1 сентября 1955 г., реферирована в журнале *Econometrica* **24**, 2, стр. 201—202, апрель 1956.
- Dorfman Robert, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, Including an Analysis of Monopolistic Firms by Nonlinear Programming, 98 стр., Bureau of Business and Economic Research, University of California Press, Berkley Calif., 1951. Работа прореферирована Эрихом Шнейдером в журнале *Econometrica* **22**, 1, стр. 129—130, январь 1954.
- Frisch Ragnar A. K., Principles of Linear Programming, with Particular Reference to the Double Gradient Form of the Logarithmic Potential Method, 219 стр., memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 18 октября 1954.
- Gunther Paul, Use of Linear Programming in Capital Budgeting (письмо в издательство), Journal of the Operations Research Society of America **3**, 2, стр. 219—224, май 1955.
- Markowitz Harry M., Portfolio Selection. Тезисы, представленные на рассмотрение в Чикагский университет летом 1953 г.,

- опубликованы в журнале *Journal of Finance* 7, 1, стр. 77 -91, март 1952.
- Martin Alfred D., Jr., *Mathematical Programming of Portfolio Selections*, *Management Science* 1, 2, стр. 152—156, январь 1955.
- Samuelson Paul A., *Linear Programming and Economic Theory*. Опубликовано в *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming* 1, стр. 251—272 (сборник работ, представленных на конференцию, созванную Национальным бюро стандартов совместно с Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF и состоявшуюся в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.), а также в P-685, The RAND Corporation, 17 стр., 25 мая 1955.
- Samuelson Paul A., «The Le Châtelier Principle in Linear Programming», 18 стр., RM-210, The RAND Corporation, 4 августа 1949.
- Solow Robert M., *Linear Programming: Lecture XII, Notes from M. I. T. Summer Course on Operations Research*, June 16—July 3 1953, стр. 116—129, Technology Press, M. I. T., Cambridge, Mass, 1953.
- Whitin, Thomson M., *Classical Theory, Graham's Theory and Linear Programming in International Trade*, *The Quarterly Journal of Economics* 67, стр. 520—544, ноябрь 1953.

### 5. Военные приложения

- Jacobs Walter W., *The Caterer Problem*, *Naval Research Logistics Quarterly* (Office of Naval Research) 1, 2, стр. 154—165, июнь 1953.
- Jacobs Walter W., *Military Applications of Linear Programming*, *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming* 1, стр. 1—27 (включает ссылки) (сборник работ, представленных на конференцию, организованную Национальным бюро стандартов и Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF, состоявшуюся в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.).
- Joseph Joseph A., *The Application of Linear Programming to Weapon Selection and Target Analysis*, 40 стр., *Operations Analysis Technical Memorandum* 42, Operations Analysis Division, Directorate on Operations, DCS/Operations, Headquarters USAF, Washington, D. C., 5 января 1954.
- Nicholson George E., Jr., and George W. Blackwell, *Game theory and Defense against Community Disaster*, 71 стр., Washington, D. C., февраль 1954. National Research Council, разобрана в журнале *Research Previews* 2, 3, стр. 1—5, май 1954.
- Wood M. K. and M. A. Geisler, *Development of Dynamic Models for Program Planning*, гл. 12 помещена в сборнике *Activity Analysis of Production and Allocation*, под ред. Т. Купманса, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

## 6. Назначение персонала

- Dantzig George B., Notes on Linear Programming: часть XIV—A Computational Procedure for a Scheduling Problem of Edie, 13 стр., RM-1290, The RAND Corporation, 1 июля 1954.

## 7. Планирование производства и хранения

- Bellman Richard E., Mathematical Aspects of Scheduling Theory, 61 стр., P-651, The RAND Corporation, 23 мая 1955. Опубликовано в журнале Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 4, 3, стр. 168—205, сентябрь 1956.
- Cahn Albert S., Jr., The Warehouse Problem (Abstract 505), Bulletin of the American Mathematical Society 54, стр. 1073, ноябрь 1948.
- Charnes Abraham and William W. Cooper, Generalizations of the Warehousing Model, ONR Research Memorandum 34, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa. Опубликована также в журнале Operational Research Quarterly 6, 4, стр. 131—172, декабрь 1955.
- Charnes Abraham, William W. Cooper and Donald Farr, Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm, Journal of the Operations Research Society of America 1, 3, стр. 114—129, май 1953.
- Charnes Abraham, William W. Cooper and B. Mellon, A Model for Optimizing Production by Reference to Cost Surrogates, Econometrica 23, 3, стр. 307—323, июль 1955. Опубликована также в Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming 1, стр. 117—150 (сборник работ, представленных конференции, организованной Национальным бюро стандартов совместно с Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF. Конференция состоялась 27—29 января 1955 г. в Вашингтоне).
- Geppert Alan and Charles H. Grace, Operations Research... as It is Applied to Production Problems, Tool Engineer 36, 5, стр. 73—79, май 1956.
- Johnson Selmer M., Optimal Two- and Three-stage Production Schedules with Setup Times Included, 10 стр., P-402, The RAND Corporation 5 мая 1953 г. Представлена собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Вашингтоне 28 декабря 1953 г.; опубликована в Naval Research Logistics Quarterly (Office of Naval Research) 1, 1, стр. 61—68, март 1954.
- Magee John R., Guides to Inventory Policy, часть I: Functions and Lot Sizes, Harvard Business Review 34, 1, стр. 49—60, январь—февраль 1956; часть II: Problems of Uncertainty, там же 34, 2, стр. 103—116, март—апрель 1956; часть III: Anticipating Future Needs, там же 34, 3, стр. 57—70, май—июнь 1956.
- Magee John R., Linear Programming in Production Scheduling. Работа представлена первой национальной конференции Operations Research Society of America, состоявшейся в Вашингтоне



- 17—18 ноября 1952 г., реферирована в *Journal of the Operations Research Society of America* 1, 2, стр. 76, февраль 1953.
- Ma n n e Alan S., An Application of Linear Programming to the Procurement of Transport Aircraft, 2 стр., P-672A, The RAND Corporation, 13 мая 1955 г., представлена второй национальной конференции Institute of Management Sciences, состоявшейся в Нью-Йорке 20—21 октября 1955 г.; реферирована в *Management Science* 2, 2, стр. 190—191, январь 1956.
- S a l v e s o n Melvin E., The Assembly Line Balancing Problem, Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming 1, стр. 55—101. Сборник работ, представленных конференции, организованной Национальным бюро стандартов совместно с Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF. Конференция состоялась в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.; работа опубликована также в *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* 77, 6, стр. 939—947, август 1955 и в *Journal of Industrial Engineering* 6, 3, стр. 18—25, май—июнь 1955.
- V a z s o n y i Andrew, A Problem in Machine Shop Loading. Работа представлена пятой национальной конференцией Operations Research Society of America, состоявшейся в Вашингтоне 19—20 ноября 1954 г.; реферирована в *Journal of the Operations Research Society of America* 3, 1, стр. 115, февраль 1955.
- W h i t i n Thomson M., Inventory Control Research: A Survey, *Management Science* 1, 1, стр. 32—40, октябрь 1954.

## 8. Расчеты и конструирование

- C h a r n e s Abraham and Herbert J. Greenberg, Plastic Collapse and Linear Programming. Preliminary Report. Работа представлена летней конференцией Американского математического общества, состоявшейся в сентябре 1951 г., реферирована в *Bulletin of the American Mathematical Society* 57, 6, стр. 480, ноябрь 1951.
- D o r n W. S. and Herbert J. Greenberg, Linear Programming and Plastic Limit Analysis of Structures, 30 стр., Technical Report 7, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa., август 1955.
- H e y m a n Jacques, Plastic Design of Beams and Plane Frames for Minimum Material Consumption, *Quarterly of Applied Mathematics* 8, 4, стр. 373—381, январь 1951.

## 9. Регулировка уличного движения

- L a v a l l e e R. Stanley, The Application of Linear Programming to the Problem of Scheduling Traffic Signals. Работа представлена седьмой национальной конференцией Operations Research Society of America, состоявшейся в Лос-Анжелосе 15—17 августа 1955 г.; реферирована в журнале *Journal of the Operations Research Society of America* 3, 4, стр. 562, ноябрь 1955.

# 10. Транспортная задача и теория сети

- Batchelor James H., A Commercial Use of Linear Programming, Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming 1, стр. 103—116. (Сборник работ, представленных конференции, созданной Национальным бюро стандартов совместно с Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller Headquarters USAF в Вашингтоне 27—29 января 1955.)
- Clem William J., Two Techniques of Linear Programming, 61 стр., Department of Industrial Engineering, Columbia University, New York, сентябрь 1954.
- Dantzig George B., Lester R. Ford, Jr., and Delbert R. Fulkerson, A Primal-Dual Algorithm, 16 стр., P-778, The RAND Corporation, 5 декабря 1955 г. Опубликовано также как часть XXXI Notes on Linear Programming, 14 стр., RM-1709, The RAND Corporation, 9 мая 1956.
- Dwyer Paul S., The Solution of the Hitchcock Transportation Problem with a Method of Reduced Matrices, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., декабрь 1955.
- Flood Merrill M., Application of Transportation Theory to Scheduling a Military Tanker Fleet, Journal of the Operations Research Society of America 2, 2, стр. 150—162, май 1954.
- Flood Merrill M., On the Hitchcock Distribution Problem, 26 стр., P-213, The RAND Corporation, май 1951 г. Представлена симпозиуму по линейным неравенствам и программированию, совместно организованному Air Force DCS/Comptroller, Headquarters USAF и Национальным бюро стандартов в Вашингтоне 14—16 июня 1951 г. Опубликовано в Project SCOOP, Manual 10, стр. 74—99, 1 апреля 1952 г., опубликована также в Pacific Journal of Mathematics 3, 2, стр. 369—386, июнь 1953.
- Ford Lester R., Jr., and Delbert R. Fulkerson, Notes on Linear Programming, часть XXIX — A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem, 21 стр., RM-1604, The RAND Corporation, 29 декабря 1955 г., также в отчете P-743, The RAND Corporation.
- Fulkerson Delbert R. and George B. Dantzig, Computation of Maximal Flows in Networks, Naval Research Logistics Quarterly (Office of Naval Research) 2, 4, стр. 277—283, декабрь 1955.
- Gleyzel Andre N., An Algorithm for Solving the Transportation Problem (Отчет 2583), Journal of Research of the National Bureau of Standards, 54, 4, стр. 213—216, апрель 1955.
- Heller Isidor, Least Ballast Shipping Required to Meet a Specified Shipping Program. Представлена симпозиуму по линейным неравенствам и программированию, организованному совместно Национальным бюро стандартов и Air Force, DCS/Comptroller, Headquarters USAF в Вашингтоне 14—16 июня 1951 г., опубликована в Project Scoop, Manual 10, стр. 164—171, 1 апреля 1952.
- Hitchcock Frank I., The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, Journal of Mathematics and

- Physics (Massachusetts Institute of Technology) **20**, 3, стр. 224—230, август 1941.
- Канторович Л. В., О перемещении масс, Доклады Академии наук СССР **37**, 7—8, стр. 227—229, 1942.
- Корманс Тjalling C., Optimum Utilization of the Transportation System. Работа представлена международному совещанию Эконометрического общества, состоявшемуся 6—18 сентября 1947 г.; реферирована в журнале *Econometrica* **16**, 1, стр. 66—68, январь 1948; полностью опубликована в журнале *Econometrica* **17**, 3 и 4, стр. 136—145, 1949.
- Орден Алекс, The Transshipment Problem, *Management Science* **2**, 3, стр. 276—285, апрель 1956.

### 11. Задача коммивояжера

- Данциг Джордж В., Делберт Р. Фulkerson and Selmer Johnson, Solution of a Large-scale Traveling-salesman Problem, 33 стр., P-510, The RAND Corporation, 12 апреля 1954 г., переиздана 8 июля 1954 г. Представлена летней конференции Эконометрического общества, состоявшейся 10—13 сентября 1954 г. в Монреале (Канада); опубликована в журнале *Journal of the Operations Research Society of America* **2**, 4, стр. 393—410, ноябрь 1954; рассмотрена также Куном в журнале *Mathematical Reviews* **17**, 1, стр. 58, январь 1956.
- Флоуд Меррилл М., The Traveling-salesman Problem, 21 стр., 13-й доклад на неофициальном семинаре по исследованию операций, организованном The Operations Research Office и проходившем в университете Джона Гопкинса в Балтиморе в 1954—1955 гг. Доклад состоялся 16 февраля 1955 г.; опубликован в *Operations Research (JRSA)* **4**, 1, стр. 61—75, февраль 1956; опубликован также в сборнике *Operations Research for Management* (под редакцией J. F. McCloskey и J. M. Copinger) **11**, стр. 340—357, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1956.
- Хеллер Исидор, On the Traveling Salesman's Problem, *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming* **11**, стр. 643—665. (Сборник работ, представленных конференции, организованной Национальным бюро стандартов совместно с Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF в Вашингтоне 27—29 января 1955 г.)

### 12. Другие приложения

- Данциг Джордж В. and Alan J. Hoffman, Dilworth's Theorem on Partially Ordered Sets, статья 11, стр. 207—214 in «Linear Inequalities and Related Systems», *Annals of Mathematics Studies* **38**, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- Форд Лестер, Jr., and Delbert R. Fulkerson, Maximal Flow through a Network. Работа представлена собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Нью-Йорке 27—30 декабря 1955 г.; опубликована в журнале *Canadian Journal of Mathe-*

- matics 8, 3, стр. 399—404, 1956, а также в RM-1400 and P-605, The RAND Corporation, 12 стр., 19 ноября 1954.
- Hoffman Alan J. and Harold W. Kuhn, On Systems of Distinct Representatives, статья 10, стр. 199—206 в Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Studies 38, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- Kruskal Joseph B., Jr., On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem, 4 стр., Logistics Papers Issue 11, The George Washington University Logistics Research Project, Приложение к квартальному отчету 21, 16 ноября 1954, 15 февраля 1955, 3 марта 1955.
- Mannos Murray, An Application of Linear Programming to Efficiency in Operations of a System of Dams. Работа представлена летнему собранию Эконометрического общества, состоявшемуся в Монреале, Канада, 10—13 сентября 1954 г.; реферирована в журнале Econometrica 23, 3, стр. 335—336, июль 1955.
- Orden Alex, Application of Linear Programming to Optical Filter Design. Сборник работ, представленных конференции, организованной National Bureau of Standards and the Directorate of Management Analysis Service, DCS/Comptroller, Headquarters USAF в Вашингтоне 27—29 января 1955 г. Краткое сообщение в Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming 1, стр. 185, 1955.
-

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agmon S., The Relaxation Method for Linear Inequalities, Canadian Journal of Mathematics **6**, 1954.
2. Allen R. G. D., Mathematical Economics, The Macmillan Company, New York, 1956.
3. Antosiewicz H. A. and A. J. Hoffman, A Remark on the Smoothing Problem, Management Science **1**, 1954—1955.
4. Beale E. M. L., Cycling in the Dual Simplex Algorithm, Naval Research Logistics Quarterly **2**, 4, 1955.
5. Beale E. M. L., Alternative Method for Linear Programming, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **50**, 1954.
6. Bellman R., The Theory of Dynamic Programming, chap. II in E. F. Beckenbach (ed.), Modern Mathematics for the Engineer, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
7. Bowman E. H., Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming, Operations Research **4**, 1956.
8. Brown G. W., Iterative Solution of Games by Fictitious Play, chap. XXIV of Koopmans [65].
9. Charnes A., Optimality and Degeneracy in Linear Programming, Econometrica **20**, 1952.
10. Charnes A. and W. W. Cooper, The Stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems, Management Science **1**, 1954—1955.
11. Charnes A., W. W. Cooper and D. Farr, Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm, Journal of the Operations Research Society of America **1**, 1953.
12. Charnes A., W. W. Cooper and A. Henderson, Introduction to Linear Programming, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.
13. Charnes A., W. Cooper and B. Mellon, Blending Aviation Gasolines — A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company, Econometrica **20**, 1952.
14. Charnes A. and C. E. Lemke, The Bounded Variables Problem, ONR Research Memorandum 10, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa., 1954.
15. Charnes A. and C. E. Lemke, Minimization of Non-linear Separable Functions, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa., 1954.
16. Cooper W. W. and A. Charnes, Linear Programming, Scientific American, August 1954.

17. Dantzig G. B., Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, chap. XXI of Koopmans [65].
18. Dantzig G. B., Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, chap. XXIII of Koopmans [65].
19. Dantzig G. B., A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem, chap. XX of Koopmans [65].
20. Dantzig G. B., Block Triangular Systems in Linear Programming, RAND Report RM-1273, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
21. Dantzig G. B., Computational Algorithm of the Revised Simplex Method, RAND Report RM-1266, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
22. Dantzig G. B., The Dual Simplex Algorithm, RAND Report RM-1270, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
23. Dantzig G. B., Composite Simplex-Dual Simplex Algorithm, I, RAND Report RM-1274, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
24. Dantzig G. B., Variables with Upper Bounds in Linear Programming, RAND Report RM-1271, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
25. Dantzig G. B., Linear Programming under Uncertainty, RAND Report RM-1374, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
26. Dantzig G. B., Developments in Linear Programming, in Directorate of Management Analysis [37].
27. Dantzig G. B., Discrete-variable Extremum Problems, RAND Report RM-1832, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
28. Dantzig G. B., L. R. Ford, Jr., and D. R. Fulkerson, A Primal-Dual Algorithm, RAND Report RM-1709, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
- 28a. Dantzig G. B. and S. Johnson, A Production Smoothing Problem, pp. 151—176 of Directorate of Management Analysis [37].
29. Dantzig G. B. and W. Orchard-Hays, Alternate Algorithm for the Revised Simplex Method, RAND Report RM-1268, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
30. Dantzig G. B., W. Orchard-Hays and G. Waters, Product-form Tableau for Revised Simplex Method, RAND RM-1268A, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
31. Dantzig G. B. and A. Orden, A Duality Theorem Based on the Simplex Method, pp. 51—55 of Directorate of Management Analysis [35].
- 31a. Dantzig G. B. and A. Orden, Duality Theorems, RAND Report RM-1265, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., October 1953.
32. Dantzig G. B., A. Orden and P. Wolfe, Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints, RAND Report RM-1264, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.

33. Di Carlo-Cottone M., The Optimum Transportation Problem (mimeograph), DCS/Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., 1954.
34. Dickson L. E., New First Course in the Theory of Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.
35. Directorate of Management Analysis, Symposium on Linear Inequalities and Programming, A. Orden and L. Goldstein (eds.), DCS/Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., April 1952.
36. Directorate of Management Analysis, The Application of Linear Programming Techniques to Air Force Problems, DCS/Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., December 1954.
37. Directorate of Management Analysis, Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, H. Antosiewicz (ed.), 1 and 2, DCS/Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., January 1955.
38. Dorfman R., Mathematical, or «Linear», Programming, American Economic Review 43, December 1953.
39. Dorfman R., Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, University of California Press, Berkeley, Calif., 1951.
40. Dorfman R., P. A. Samuelson and R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
41. Dwyer P. S., Solution to the Personnel Classification Problem with the Method of Optimal Regions, Psychometrika 19, 1954.
42. Egerváry E., On Combinatorial Properties of Matrices, Matematika és Fizikai Lapok 38, 1931; Translated as Combinatorial Properties of Matrices, by H. W. Kuhn, Office of Naval Research Logistics Project Report, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.
43. Ford L. R., Jr., and D. R. Fullkerson, Solving the Transportation Problem, RAND Report RM-1736, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
44. Ford L. R., Jr., and D. R. Fullkerson, A Primal Dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem, RAND Report RM-1798, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
45. Gale D., H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Linear Programming and the Theory of Games, chap. XIX of Koopmans [65].
46. Gass S. I., A First Feasible Solution to the Linear Programming Problem, pp. 495—508 of Directorate of Management Analysis [37].
47. Gass S. I. and T. L. Saaty, Parametric Objective Function, Part II, Generalization, Journal of the Operations Research Society of America 3, 1955.
48. Gass S. I. and T. L. Saaty, The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, Naval Research Logistics Quarterly 2, 1955.
49. Gerstenhaber M. and J. E. Kelley, Jr., Threshold Methods in Linear Programming, Remington Rand Univac, Philadelphia, Pa., 1956.

50. Glazer E., Introductory Notes on Input-Output Analysis, mimeograph notes presented to the Washington section of the American Statistical Association Washington, D. C., 1953.
51. Goldman A. J. and A. W. Tucker, Theory of Linear Programming, pp. 53—97 of Kuhn and Tucker [68].
- 51a. Goldstein L., The Simplex Solution of Waugh's Problem, mimeographed notes, Directorate of Management Analysis, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., 1952. (Out of print.)
52. Gross O., A Class of Discrete-type Minimization Problems, RAND Report RM-1644, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
53. Harrison J. O., Jr., Linear Programming and Operations Research in J. F. McCloskey and F. N. Trefethen (eds.), Operations Research for Management 1, pp. 217—237, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1954.
54. Heller I. and C. B. Tompkins, An Extension of a Theorem of Dantzig, Paper 14, in Kuhn and Tucker [68].
55. Henderson A. and R. Schlaifer, Mathematical Programming, Harvard Business Review 32, May-June, 1954.
- 55a. Hildebrand F. B., Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1958.
56. Hirsch W. M. and G. B. Dantzig, The Fixed Charge Problem, RAND Report RM-1383, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
57. Hitchcock F. L., Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. Journal of Mathematical Physics 20, 1941.
58. Hoffman A., Cycling in the Simplex Algorithm, National Bureau of Standards Report, Washington, D. C., 1953.
59. Hoffman A. J., How to Solve a Linear Programming Problem, pp. 397—424 of Directorate of Management Analysis [37].
60. Hoffman A. J. and W. W. Jacobs, Smooth Patterns of Production, Management Science 1, 1954—1955.
61. Hoffman A. J. and J. G. Kruskal, Integral Boundary Points of Convex Polyhedra, Paper 13 in Kuhn and Tucker [68].
- 61a. Hoffman A., M. Mannon, D. Sokolowsky and N. Wiegmann, Computational Experience in Solving Linear Programs, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 1, 1953.
62. Jacobs W. W., The Caterer Problem, Naval Research Logistics Quarterly 1, 1954.
63. Joseph J. A., The Application of Linear Programming to Weapon Selection and Target Analysis, Technical Memorandum 42, Operations Analysis Division, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., 1954.
64. Katzman Irwin, Solving Feed Problems through Linear Programming, Journal of Farm Economics 38, 1956.
65. Koopmans T. C. (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.



66. Koopmans T. C., Optimum Utilization of the Transportation System, *Econometrica* 17, Supplement, 1949.
67. Kuhn H. W., Lectures on the Theory of Games, *Annals of Mathematics Studies* 37, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. (Also Logistics Research Report sponsored by the Office of Naval Research, Project NR047-002).
68. Kuhn H. W. and A. W. Tucker, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Mathematics Studies* 38, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
69. Kuhn H. W. and A. W. Tucker, Non-linear Programming in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, Calif., 1951.
70. Lemke C. E., The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, *Naval Research Logistics Quarterly* 1, 1, 1954.
71. Leontief W. W., The Structure of the American Economy, 1919—1929, Oxford University Press, New York, 1951.
72. McKinsey J. C. C., Introduction to the Theory of Games, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952.
73. Magee John R., Studies in Operations Research, I. Application of Linear Programming to Production Scheduling, Arthur D. Little, Inc., Cambridge, Mass.
74. Manne A. S., Notes on Parametric Linear Programming, RAND Report P-468, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
75. Morgenstern O. (ed.), Economic Activity Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.
76. Motzkin T. S., The Multi-index Transportation Problem, *Bulletin of the American Mathematical Society* 58, 4, 1952.
77. Motzkin T. S. and I. J. Schoenberg, The Relaxation Method for Linear Inequalities, *Canadian Journal of Mathematics* 6, 1954.
78. Neumann J. von, A Certain Zero-sum Two person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem, pp. 5—12 of *Annals of Mathematics Studies* 28, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.
79. Neumann J. von, A Numerical Method to Determine Optimum Strategy, *Naval Research Logistics Quarterly* 1, 1954.
80. Neumann J. von and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1947.
81. Orchard-Hays W., Background, Development and Extensions of the Revised Simplex Method, RAND Report RM-1433, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
82. Orchard-Hays W., The RAND Code for the Simplex Method, RAND Report RM-1269, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
83. Orchard-Hays W., A Composite Simplex Algorithm-II, RAND Report RM-1275, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
84. Orden A., Application of the Simplex Method to a Variety of Matrix Problems, pp. 28—50 of Directorate of Management Analysis [35].

85. Orden A., A Procedure for Handling Degeneracy in the Transportation Problem, mimeograph, DCS/Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C., 1951. (Out of print.)
86. Raiffa H., G. L. Thompson and R. M. Thrall, An Algorithm for the Determination of All Solutions of a Two-person Zero-sum Game with a Finite Number of Strategies (Double Descriptive Method), pp. 100—114 of Directorate of Management [35].
87. Riley V. and S. I. Gass, Bibliography on Linear Programming and Related Techniques, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958.
88. Saaty T. L., The Number of Vertices of a Polyhedron, American Mathematical Monthly 62, 1955.
89. Saaty T. L. and S. I. Gass, The Parametric Objective Function, Part I, Journal of the Operations Research of America 2, 1954.
90. Schell E., Distribution of a Product by Several Properties, pp. 615—642 of Directorate of Management Analysis [37].
91. Stanley E. D., D. Honig and L. Gainen, Linear Programming in Bid Evaluation, Naval Research Logistics Quarterly 1, 1954.
92. Stigler G. J., The Cost of Subsistence, Journal of Farm Economics 27, 1945.
93. Suzuki G., A Transportation Simplex Algorithm for Machine Computation Based on the Generalized Simplex Method, Report 959, The David W. Taylor Model Basin, Washington, D. C., 1955.
- 93a. Tintner G., Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics, pp. 197—228 of Directorate of Management Analysis [37].
94. Tompkins C., Projection Methods in Calculation, pp. 425—447 of Directorate of Management Analysis [37].
95. Tucker A. W., Linear Programming, pp. 651—657 of The Quality Control Conference Papers, 1953, American Society for Quality Control, Inc., New York.
96. Tucker A. W., Linear and Non-linear Programming, Operations Research 5, April 1957.
97. Vajda S., The Theory of Games and Linear Programming, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.
- 97a. Votaw D. F. and A. Orden, The Personnel Assignment Problem, 155—163 of Directorate of Management Analysis [35].
98. Wagner H. M., A Linear Programming Solution to Dynamic Leontief Type Models, RAND Report RM-1343, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
99. Wagner H. M., A Comparison of the Original and Revised Simplex Methods, Operations Research 5, 3, 1957.
100. Waugh F. V., The Minimum-cost Dairy Feed, Journal of Farm Economics, August 1951.
101. Williams J., The Compleat Strategyst, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
102. Wolfe P., The Simplex Method for Quadratic Programming, RAND Report P-1295, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., October 1957.

**Литература, цитированная в примечаниях  
редактора**

- 1р. Линейные неравенства (сборник переводов), ИЛ, 1959.
  - 2р. Применение математики в экономических исследованиях, Соц-экгиз, 1959.
  - 3р. Кантор ов и ч Л. В., Математические методы в организации и планировании производства, ЛГУ, 1939.
  - 4р. Кантор ов и ч Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, АН СССР, 1959.
  - 5р. Кантор ов и ч Л. В., Гавури н М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, АН СССР, 1949, стр. 110—138.
  - 6р. Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.
-

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аллен** (Allen R. G. D.) 114, 292  
**Беллман** (Bellman R.) 246, 292  
**Бил** (Beale E. M. L.) 78, 146, 151, 292  
**Браун** (Brown G. W.) 179, 292  
**Вагнер** (Wagner H. M.) 121, 228, 231, 297  
**Вайда** (Vajda S.) 103, 176, 297  
**Ваф** (Waugh F. V.) 233, 297  
**Вигман** (Wiegmann N.) 96, 179, 295  
**Вильямс** (Williams J.) 275, 279, 297  
**Вольф** (Wolfe P.) 78, 120, 142, 146, 233, 297  
**Гавурин** М. К. 184  
**Гаррисон** (Harrison J. O., Jr.) 114, 115, 295  
**Гасс** (Gass S. I.) 152, 163, 169, 246, 279, 294  
**Гейнен** (Gainen L.) 15, 212, 297  
**Гендерсон** (Henderson A.) 26, 56, 78, 196, 292, 295  
**Герстенхабер** (Gerstenhaber M.) 183, 294  
**Гильдебранд** (Hildebrand F. B.) 53, 295  
**Голдман** (Goldman A. J.) 113, 295  
**Голдстейн** (Goldstein L.) 15, 102, 233, 242, 295  
**Гофман** (Hoffman A. J.) 15, 78, 96, 142, 146, 179, 244, 295  
**Гросс** (Gross O.) 244, 295  
**Гэйл** (Gale D.) 103, 294  
**Данциг** (Dantzig G. B.) 11, 13, 14, 15, 56, 65, 78, 82, 96, 103, 117, 120, 121, 123, 130, 142, 146, 176, 178, 182, 184, 189, 194, 196, 205, 231; 245, 246, 279, 293  
**Двайер** (Dwyer P. S.) 207  
**Джекобс** (Jacobs W. W.) 15, 256  
**Дорфман** (Dorfman R.) 26, 114  
**Канторович** Л. В. 15, 184  
**Келли** (Kelley J. E., Jr) 183, 294  
**Крускал** (Kruskal J. G.) 244  
**Кун** (Kuhn N. W.) 53, 103, 246, 260, 266, 270, 279  
**Купер** (Cooper W. W.) 26, 56, 78, 182, 189, 196  
**Купманс** (Koormans T. C.) 14, 53, 184  
**Лемке** (Lemke C. E.) 173, 175, 246  
**Леонтьев** 224, 246  
**Мак-Кинси** (Mc Kinsey J. C. C.) 270, 279  
**Мани** (Manne A. S.) 152  
**Маннос** (Mannos M.) 96, 179  
**Моргенштерн** (Morgenstern O.) 226, 270, 279  
**Моцкин** (Motzkin T. S.) 179  
**Нейман, фон** (Neumann J. von) 179, 270, 279  
**Орден** (Orden A.) 15, 78, 89, 92, 103, 117, 120, 142, 146, 195  
**Орчард-Хейс** (Orchard-Hays W.) 121, 123, 130, 169, 178.  
**Райффа** (Raiffa H.) 179  
**Релей** (Riley V.) 246

- Саати (Saaty T. L.) 15, 65, 99, 163, 279  
Самуэльсон (Samuelson P. A.) 114  
Соколовский (Sokolowsky D.) 96, 179  
Солоу (Solow R.) 114  
Стиглер (Stigler G. J.) 14, 231, 232, 233  
Стэнли (Stanley E. D.) 212  
Сузуки (Suzuki G.) 183  
Таккер (Tucker A. W.) 53, 103, 113, 114, 246  
Тинтнер (Tintner G.) 246  
Томпкинс (Tompkins C.) 244  
Томпсон (Thompson G. L.) 179  
Тролл (Thrall R. M.) 179  
Форд (Ford L. R., Jr.) 179 184, 244  
Фулкерсон (Fulkerson D. R.) 179, 184, 244  
Хеллер (Heller I.) 244  
Хичкок (Hitchcock F. L.) 14, 184  
Хониг (Honig D.) 212  
Чарнес (Charnes A.) 26, 56, 78, 142, 182, 189, 196, 246  
Шейнберг (Schoenberg I. J.) 179  
Шелл (Schell E.) 15, 244  
Шлейфер (Schlaifer R.) 26, 196  
Эгмон (Agmon S.) 179
-

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгоритм симплексного метода  
78 и д., 85

Базис искусственный 90  
— пространства 37

Вектор 33, 36  
— противоположный 34  
— -столбец 29  
— -строка 29

Векторы линейно зависимые 35  
— — независимые 35  
Выигрыш 259

Гиперплоскость 37  
Грани симплекса 40

**ДАТАТРОН** 180  
Дополнение алгебраическое 33  
Длина вектора 35

Задача двойственная 103  
— — несимметричная 111  
— — параметрическая 160 и д.  
— — —, метод выбора 162  
— — симметричная 111  
— исходная 103  
— расширенная 125  
— с ограниченными переменными 243  
— сопряженная — см. *Задача двойственная*  
— с разрывной функцией цели 245

Задачи бумажной промышленности 249  
— военные 252  
— двойственные симметричные 117

Задачи динамического программирования 245

— диеты 25, 231 и д.  
— заключения контрактов 210  
— коммерческих авиалиний 248  
— коммивояжера 255  
— конструирования 254  
— линейного программирования 17, 45, 55

— — —, математическая модель 17

— межотраслевые 222 и д.  
— —, модель открытая 226  
— —, — статистическая Леонтьева 228

— металлургической промышленности 249

— назначения персонала 207 и д., 253

— нелинейного программирования 245

— нефтяной промышленности 250

— планирования производства 24, 114 и д., 216 и д., 253

— регулирования уличного движения 254

— связи 249

— сельского хозяйства 247

— теории сетей 255

— транспортные 22, 23, 250, 255

— —, задача многоиндексная 244

— —, — общая 184 и д., 189, 192, 193, 196

— —, — с ограничениями 244

— угольной промышленности 248

Задачи химической промышленности 248

— экономических исследований 251

Закон ассоциативный 30, 34

— дистрибутивный 30, 34

— коммутативный 30, 34

Зацикливание 142 и д., 146

Значения параметра критические 156

*ИБМ-650* 180, 182

*ИБМ-701* 181, 182

*ИБМ-702* 181, 182

*ИБМ-704* 181, 182

*ИБМ-705* 181, 182

Игра 258

— матричная 261

— симметричная 267

Конус 40

— выпуклый 40

Комбинация точек выпуклая 37

Коэффициенты стоимости 21

Критерий (показатель) качества см. *Функция цели*

Матрица 28

— выигрышей 261

— диагональная 29

— единичная (тождественная) 29

— квадратная 28

— кососимметричная 29

— Леонтьева 226

— неособенная 32

— нулевая 30

— обратная 33

— —, представление мультипликативное 138

— особенная 32

— присоединенная 33

— симметрическая 29

— транспонированная 29

— треугольная 29

— элементарная 137

Машина вычислительная *1103*, 182

— — *1103-A* 182

Метод выбора 162

— двойного описания 179

— искусственного базиса 89 и д.

Метод полного исключения (метод Жордана—Гаусса) 47

— последовательного улучшения плана 73

— проекций 179

— релаксационный 179

— симплексный 65

— —, алгоритм 78 и д., 85

— —, базис искусственный 90

— — двойственный 173

— — модифицированный 120, 123

— —, план исходный 167 и д. Минор 32

Многогранник выпуклый 40

Множество выпуклое 38

— —, точка крайняя 40

— планов задачи 57

Оболочка множества выпуклая 40

Определение исходного плана 167 и д.

Определитель матрицы 31

Партия 258

*ПЕГАС* 180, 182

Переменная дополнительная 44, 96

План задачи линейного программирования 56

— — —, множество планов 57

— исходный 167 и д.

— опорный 57

— — вырожденный 141

— — невырожденный 57

— —, построение 65 и д.

— оптимальный (решение) 17, 57, 76

— —, построение 73 и д.

— —, решение критическое 156

Порядок матрицы 28

Построение опорных планов 65 и д.

— оптимального плана 73 и д. Правило минимального элемента матрицы 206

— минимума по столбцу 206

— — строке 206

— северо-западного угла 189

- Программирование линейное параметрическое 156  
— — целочисленное 243  
Произведение векторов скалярное 34  
Пространство евклидово  $n$ -мерное 36  
Ранг матрицы 32  
Расстояние между векторами 35  
Решение задачи линейного программирования — см. *План оптимальный*  
— игры 265  
— критическое 156  
Свойства определителя 32  
Симплекс 40  
Система векторов линейно зависящая 35  
— — — независимая 35  
— — — линейных уравнений 18  
— — — неопределенная 19  
— — — определенная 19  
Сложение векторов 34  
— матриц 30  
Столбец направляющий 85  
— особый 137  
Стратегия оптимальная 265  
— смешанная 262  
Строка направляющая 85  
Теорема двойственности 104  
Теория игр 258  
Точка седловая 264  
Точки выпуклого множества крайние 40  
— — — — соседние 99  
Умножение векторов 34  
— матриц 30  
*УНИВАК-1* 181, 183  
Функционал линейный 57  
Функция выигрыша 264  
— цели 20  
Цена игры 265  
Цены учетные (неявные, фиктивные) 116  
Элемент матрицы 28
-



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
«ФИЗМАТГИЗ»

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ

Фукс Б. А. и Левин В. И., Функции комплексного переменного и их приложения, 307 стр., 88 коп.

Мейер цур Капеллен В., Инструментальная математика для инженеров, 380 стр., 1 р. 42 к.

Бут Э. и Бут К., Автоматические цифровые машины, 320 стр., 1 р. 05 к.

Головистиков П. П. и др., Арифметическое устройство и устройство управления БЭСМ, 244 стр., 99 коп.

Лебедев С. А. и Мельников В. А., Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций, 208 стр., 70 коп.

Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, 182 стр., 29 коп.

Хованский А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, 203 стр., 53 коп.

---

*Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются наложенным платежом всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга-почтой».*

